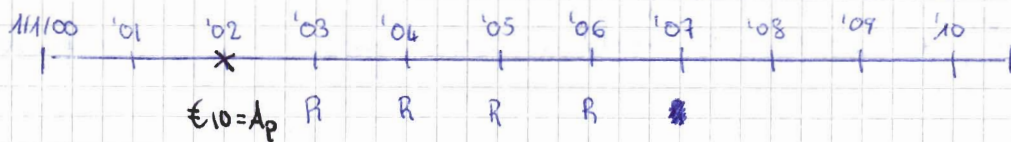


AMMORTAMENTO FRANCESE



$$Ap_{02} = R \cdot a_{\overline{m}|i} \Rightarrow R = \frac{Ap}{a_{\overline{m}|i}} \Rightarrow R = Ap \cdot \frac{1}{a_{\overline{m}|i}}$$



valore attuale di una rendita posticipata

[E' la rata d'ammortamento del debito in m periodi al tasso i]

Per il calcolo dell'ammortamento francese ci riferiamo alle rendite in genere, poiché la loro caratteristica comune è la costanza dei periodi e delle rate.

L'ammortamento francese, o A RATE COSTANTI o PROGRESSIVO si riferisce ad una rendita il cui valore attuale Ap posticipato viene interpretato come debito D da estinguere o da ammortizzare.

La rata è costante perché è il capitale equivalente ad Ap .

Le rate R da pagare con costanza periodica per l'estinzione del debito D sono uguali a:

$$R = \frac{D}{a_{\overline{m}|i}}$$

posto $\alpha_{\overline{m}|i} = \frac{1}{a_{\overline{m}|i}}$ si ha:

$$R = D \cdot \alpha_{\overline{m}|i}$$

$$\text{con } \alpha_{\overline{m}|i} = \frac{i}{1-v^m}$$

$$v \cdot \frac{1}{1-v^m} = \frac{1}{1-v^{m-1}} \leftarrow \text{teorema di Binet}$$

$$v \cdot \frac{1}{1-v^m} = \frac{1}{1-v^{m-1}} \leftarrow \text{teorema di Binet}$$

$$v \cdot \frac{1}{1-v^m} = \frac{1}{1-v^{m-1}} \leftarrow \text{teorema di Binet}$$

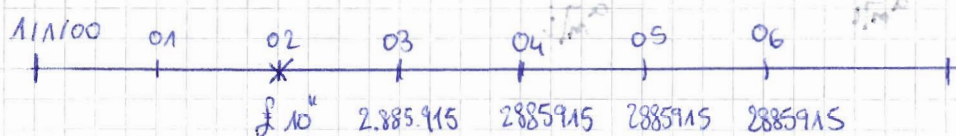
dove $\alpha_{\overline{m}|i}$ è la rata di ammortamento del debito di 1€ in m periodi

(ammi) al tasso i ; se il debito invece di essere unitario è di importo D ,

la rata si ottiene moltiplicando $D \cdot \alpha_{\overline{m}|i}$

Esempio: Se abbiamo $\alpha_{4|0,06}$ è la rata di ammortamento del debito di £1 al tasso del 6% annuo per 4 anni; se il debito anziché essere di 1£ è di 10^6 , 10 milioni si moltiplicherà per $\alpha_{4|0,06}$, infatti

$$\alpha_{4|0,06} = R \cdot \frac{1}{a_{\overline{4}|i}} = 10^6 \cdot \frac{1}{\frac{1-1,06^{-4}}{0,06}} = 10^6 \cdot \frac{0,06}{1-1,06^{-4}} = 10^6 \cdot 0,288591492 = 2.885.915$$



Piano d'ammortamento:

È un prospetto in cui sono inseriti tutti gli elementi che formano un debito D .

t tempo	R rata	γ_k interessi	C_k capitale	E_k debito estinto	D_k debito residuo
1/1/02					10.000.000
1/1/03	2.885.915	600.000	2.885.915	2.885.915	7.714.085
1/1/04	2.885.915	462.845	2.423.090	4.709.985	5.291.015
1/1/05	2.885.915	317.461	2.568.554	7.277.439	2.722.561
1/1/06	2.885.915	183.354	2.722.561	10.000.000	0
	11.543.660	1.543.660	10.000.000		

- Interessi $\Rightarrow I_k = D_{k-1} \cdot i$ $\rightarrow$ = debito residuo al tempo $K-1$

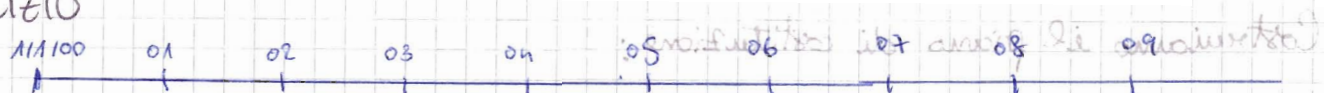
- Capitale $\Rightarrow C_k = R - \gamma_k \Rightarrow R = C_k + \gamma_k$

- Debito estinto $\Rightarrow E_k = \sum_{i=1}^k C_i = E_k - C_k \Rightarrow E_1 = C_1, E_2 = C_1 + C_2, E_3 = C_1 + C_2 + C_3$

- Debito residuo $\Rightarrow D - E_k$

- Debito iniziale $\Rightarrow D = D_0 = A_0 = C$

ESERCIZIO



Dati:

$$M_p = 10.000.000$$

$$m = 4$$

$$i = 0,06$$

$$R = ?$$

$$M = R \cdot s_{\overline{m}|i} \Rightarrow R = \frac{M}{s_{\overline{m}|i}} = M \cdot \frac{1}{s_{\overline{m}|i}} \quad \text{pongo } \frac{1}{s_{\overline{m}|i}} = \sigma_{\overline{m}|i}$$

quindi:

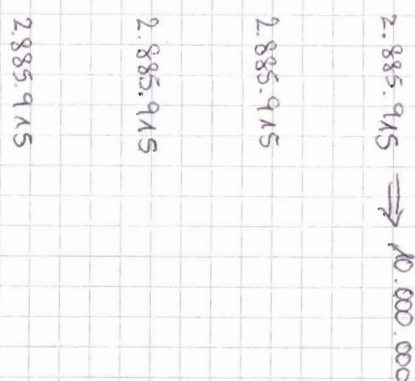
$$R = M \cdot \sigma_{\overline{m}|i} = M \cdot \frac{1}{\frac{(1+i)^m - 1}{i}} = M \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1}$$

$$R = 10^7 \cdot \sigma_{\overline{4}|0,06} = 10^7 \cdot \frac{1}{\frac{(1+0,06)^4 - 1}{0,06}} = 10^7 \cdot \frac{0,06}{(1,06)^4 - 1} = 2.285.915$$

Piano d'ammortamento



Piano di costituzione



Si nota dall'asse temporale che la rata del piano di ammortamento è più grande della rata del piano di costituzione di 600.000, importo pari all'interesse dello 0,06 sul $A_p = M_p = 10.000.000$, che riferito alla £ unitaria (1 £) è:

$$\alpha_{\overline{m}|i} = \sigma_{\overline{m}|i} + i \Rightarrow i = \alpha_{\overline{m}|i} - \sigma_{\overline{m}|i}$$

ho moltiplicato num. e den. $\Downarrow$ per $(1+i)^m$, così da eliminare $(1+i)^m$

$$\alpha_{\overline{m}|i} - \sigma_{\overline{m}|i} = \frac{i(1+i)^m}{(1+i)^m - 1} - \frac{i}{(1+i)^m - 1} = \frac{i(1+i)^m - i}{(1+i)^m - 1}$$

$$= \frac{i[(1+i)^m - 1]}{[(1+i)^m - 1]} = i \Rightarrow \alpha_{\overline{m}|i} - \sigma_{\overline{m}|i} = i$$

Costruiamo il piano di costituzione:

$$C_{1/1/06} = 10.000.000$$

$$m = 4$$

$$i = 0,06$$

$$R = 2.285.915$$

t tempo	R rata	F. Inizio anno	$i = 0,06$	F. Fine anno
1/1/03	2.285.915	2.285.915	137155	2.423.070
1/1/04	2.285.915	4.708.985	282.539	4.991.524
1/1/05	2.285.915	7.277.439	436.646	7.714.085
1/1/06	2.285.915	10.000.000		

oltre 10 anni?

oltre 10 anni?

AMMORTAMENTO FRANCESE

Si dice PROGRESSIVO perché le quote di capitale variano in ragione $(1+i)$.
Le quote di capitali crescono in progressione geometrica di ragione $1+i$

t	R	I_k	C_k	E_k	D_k
00	-	-	-	-	10.000.000
01	3154708	1.000.000	2154708	2154708	7845292
02	3154708	784592,2	2370178,8	4524886,8	5475113,2
03	3154708	547.511,32	2607196,68	7132083,48	2867916,5
04	3154708	286791,65	2867916,35	999999,83	-0,17

- RELAZIONI FONDAMENTALI, che valgono per qualsiasi tipo di ammortamento:

$$R_k = R_{k+1}$$

$$C_k + I_k = C_{k+1} + I_{k+1}$$

$$C_k + D_{k-1} \cdot i = C_{k+1} + D_k \cdot i$$

$$C_{k+1} = C_k + D_{k-1} \cdot i - D_k \cdot i$$

$$C_{k+1} = C_k + i(D_{k-1} - D_k) = C_k + i \cdot C_k \Rightarrow C_{k+1} = C_k(1+i)$$

● FORMULE DI ACCESSO DIRETTO NELL'AMMORTAMENTO FRANCESE

$$C_k = R - g_k \quad \text{ma} \quad R = A_p \cdot \alpha_{\overline{m}|i} \quad \text{e} \quad g_1 = A_p \cdot i, \quad \text{quindi:}$$

per $k=1 \Rightarrow C_1 = R - I_1$

$$C_1 = (A_p \cdot \alpha_{\overline{m}|i}) - (A_p \cdot i), \quad \text{essendo} \quad \sigma_{\overline{m}|i} = \alpha_{\overline{m}|i} - i \quad \text{si ha:}$$

$$C_1 = A_p (\alpha_{\overline{m}|i} - i) \Rightarrow C_1 = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i}$$

(si può scrivere anche con:

$$C_1 = \frac{A_p}{\alpha_{\overline{m}|i}} - A_p i \Rightarrow A_p \left(\frac{1}{\alpha_{\overline{m}|i}} - i \right) = A_p (\sigma_{\overline{m}|i})$$

$$C_k = C_1 (1+i)^{k-1}$$

$$C_k = A_p (\alpha_{\overline{m}|i} - i) (1+i)^{k-1}$$

$$C_k = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i} (1+i)^{k-1}$$

I RELAZIONE

Data la relazione:

$$\sigma_{\overline{m}|i} = \alpha_{\overline{m}|i} (u)^m \Rightarrow \frac{1}{\sigma_{\overline{m}|i}} = \frac{1}{\alpha_{\overline{m}|i}} \cdot \frac{1}{(u)^m} \Rightarrow \sigma_{\overline{m}|i} = \alpha_{\overline{m}|i} \cdot v^m$$

II RELAZIONE
(RELAZIONE delle
rendite) $= \frac{1}{u}$

si ha che:

$$C_k = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i} (1+i)^{k-1}$$

$$C_k = A_p \cdot \alpha_{\overline{m}|i} \cdot v^m (1+i)^{k-1} \Rightarrow C_k = A_p \cdot \alpha_{\overline{m}|i} \cdot v^m \cdot v^{-(k-1)}$$

$$C_k = A_p \cdot \alpha_{\overline{m}|i} \cdot v^{(m-k+1)} = R \cdot v^{m-k+1}$$

RATA C_1

numero totale dei periodi

$$g_k = R (1 - v^{(m-k+1)}) \Rightarrow \text{deriva da } g_k = R - C_k \Rightarrow \frac{I}{k} = R - R v^{m-k+1}$$

con $0 \leq k \leq m$

$$E_k = C_1 + C_2 + \dots + C_k$$

Rata in funzione del montante

è una progressione di ragione $1+i$

$$E_k = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i} \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{1+i - 1}$$

$$\Rightarrow E_k = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i} \cdot s_{\overline{k}|i}$$

III RELAZIONE
FORMULE DEL MONTANTE
POSTICIPATO

visto che

$$S = a_1 \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

con

$$m = k$$

$$a_1 = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i}$$

$$q = (1+i) > 0$$

$$\Rightarrow E_k = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i} \cdot \frac{u^m - 1}{u - 1}$$

IV RELAZIONE

$$D_k = R \cdot \alpha_{\overline{m-k}|i}$$

$$\text{visto che } E_k = A_p \cdot \sigma_{\overline{m}|i} \cdot s_{\overline{k}|i}$$

Esempio

$$D = 10''$$

$$i = 0,06$$

$$m = 4$$

$$R = ?$$

$$D = R \cdot a_{\overline{m}|i}, \quad R = \frac{D}{a_{\overline{m}|i}}, \quad R = D \cdot \frac{1}{a_{\overline{m}|i}}$$

$$R = D \cdot \alpha_{\overline{m}|i}$$

$$R = 10'' \cdot \frac{1}{\frac{1 - (1,06)^{-4}}{0,06}} = 10'' \cdot \frac{0,06}{1 - (1,06)^{-4}} = 2.885.915$$

t	R	J_k	C_k	E_k	D_k
00	-	-	-	-	10.000.000
01	2.885.915	600.000	2.885.915	2.885.915	7.714.085
02	2.885.915	462.845	2.423.070	4.708.985	5.291.015
03	2.885.915	317.461	2.568.454	7.277.439	2.722.561
04	2.885.915	163.354	2.722.561	10.000.000	0

CAPITALI

$$C_k = (A_P \cdot \alpha_{\overline{m}|i}) \cdot v^{(m-k+1)} = R \cdot v^{(m-k+1)}$$

$$C_1 = 2.885.915 \cdot (1,06)^{-(4-1+1)} = 2.885.915$$

$$C_2 = 2.885.915 \cdot (1,06)^{-(4-2+1)} = 2.423.070$$

$$C_3 = 2.885.915 \cdot (1,06)^{-(4-3+1)} = 2.568.454$$

$$C_4 = 2.885.915 \cdot (1,06)^{-(4-4+1)} = 2.722.561$$

INTERESSI

$$J_k = R (1 - v^{(m-k+1)})$$

$$J_1 = 2.885.915 (1 - (1,06)^{-4}) = 600.000$$

$$J_2 = 2.885.915 (1 - (1,06)^{-3}) = 462.845$$

$$J_3 = 2.885.915 (1 - (1,06)^{-2}) = 317.461$$

$$J_4 = 2.885.915 (1 - (1,06)^{-1}) = 163.354$$

DEBITO ESTINTO

$$E_k = Ap \cdot \sigma_{m|i} \cdot \delta k|i = Ap \cdot \frac{1}{\delta m|i} \cdot \delta k|i$$

$$E_1 = 10'' \cdot \frac{1}{\frac{(1,06)^4 - 1}{0,06}} \cdot \frac{(1,06)^1 - 1}{0,06} = 2.285.915$$

$$E_2 = 10'' \cdot \frac{1}{\frac{(1,06)^4 - 1}{0,06}} \cdot \frac{(1,06)^2 - 1}{0,06} = 4.708.985$$

$$E_3 = 10'' \cdot \frac{1}{\frac{(1,06)^4 - 1}{0,06}} \cdot \frac{(1,06)^3 - 1}{0,06} = 7.247.439$$

$$E_4 = 10'' \cdot \frac{1}{\frac{(1,06)^4 - 1}{0,06}} \cdot \frac{(1,06)^4 - 1}{0,06} = 10.000.000$$

DEBITO RESIDUO

$$D_k = R \cdot a_{m-k|i}$$

$$D_1 = 2.885.915 \cdot \frac{1 - (1,06)^{-3}}{0,06} = 7.714.085$$

$$D_2 = 2.885.915 \cdot \frac{1 - (1,06)^{-2}}{0,06} = 5.291.015$$

$$D_3 = 2.885.915 \cdot \frac{1 - (1,06)^{-1}}{0,06} = 2.722.561$$

$$D_4 = 2.885.915 \cdot \frac{1 - (1,06)^0}{0,06} = 0$$

AMMORTAMENTO ITALIANO

A quote capitali costanti (si utilizza spesso nelle dilazioni di pagamento).

Se C è la quota capitale ed A il prestito in m anni (cioè il numero di periodi) avremo

$$C = \frac{A}{m}$$

$$QC = \frac{A}{m} \text{ costanti}$$

Le quote interessi nell'ammortamento italiano variano in progressione aritmetica di ragione $q = iC = i \cdot \frac{A}{m}$

$$[1 + (i + \frac{i \cdot A}{m} \cdot m) \cdot \frac{A}{m}] = \frac{A}{m} + \frac{(1 + i \cdot m) \cdot i \cdot A}{m} = \frac{A}{m} + \frac{i \cdot A \cdot m}{m} = \frac{A}{m} + i \cdot A$$

Esempio

$$A = 10''$$

$$m = 4$$

$$i = 0,10$$

$$C = \frac{A}{m}$$

t	C	q_k	R_k	E_k	D_k
00	-	-	-	-	10.000.000
01	2.500.000	1.000.000	3.500.000	2.500.000	7.500.000
02	2.500.000	750.000	3.250.000	5.000.000	5.000.000
03	2.500.000	500.000	3.000.000	7.500.000	2.500.000
04	2.500.000	250.000	2.750.000	10.000.000	0

NB: le quote capitali sono tutte uguali tra loro e valgono $\frac{C}{m}$
oppure $C = \frac{A}{m}$

• FORMULE DELL'AMMORTAMENTO ITALIANO

- $C = \frac{A}{m}$ CAPITALE

- $g_k = A \cdot i - (k-1) \cdot \frac{A \cdot i}{m} = g_k = A \cdot i \left[1 - \frac{k-1}{m} \right] = A \cdot i \left(\frac{m-k+1}{m} \right) = Q g_k$
INTERESSI

$g_1 = A \cdot i$

$g_2 = A \cdot i - \frac{A \cdot i}{m}$

$g_3 = A \cdot i - \frac{2 A \cdot i}{m}$

$g_2 = g_1 - C \cdot i$

$\frac{A \cdot i}{m} = - \frac{A \cdot i}{m}$ (decescente)

$\frac{A \cdot i}{m} = - \frac{A \cdot i}{m}$

- $R_k = g_k + C = A \cdot i \left(\frac{m-k+1}{m} \right) + \frac{A}{m} = \frac{A}{m} \left[(i(m-k+1) + 1) \right]$

$R_k = \frac{A [1 + (m-k+1)i]}{m}$ RATA

$d = - \frac{A \cdot i}{m}$ (decescente)

- $E_k = k \cdot C = k \cdot \frac{A}{m}$ DEBITO ESTINTO

$d = +c$ (crescente)

Somma delle quote capitali già pagate

- $D_k = A - E_k = A - k \cdot \frac{A}{m} = A \left(1 - \frac{k}{m} \right) = A \left(\frac{m-k}{m} \right)$

$D_k = A \left(\frac{m-k}{m} \right)$ DEBITO RESIDUO

$d = -c$ (decescente)

AMMORTAMENTO AMERICANO

È il caso in cui le quote progressivamente pagate dal debitore non vengono messe a disposizione del creditore, ma versate in un fondo e ivi lasciate capitalizzare ad un tasso (j) , in modo che il montante prodotto, al termine degli n periodi del prestito dia esattamente la misura del capitale C da restituire.

Il tasso (j) è chiamato **TASSO DI ACCUMULAZIONE** ed è diverso dal tasso (i) di remunerazione al quale si calcolano gli interessi $(C \cdot i)$ alla fine di ogni anno, per tutti gli n anni.

Supponendo che il fondo debba arrivare a costituire un capitale pari a C mediante il versamento di quote Q , si ha:

$$C = Q \cdot s_{\overline{n}|j}$$

Rata di costituzione del capitale di 1 unità, in n versamenti al tasso j

da cui:

$$Q = \frac{C}{s_{\overline{n}|j}} = C \cdot \frac{1}{s_{\overline{n}|j}} = C \cdot \sigma_{\overline{n}|j} \Rightarrow \boxed{Q = C \cdot \sigma_{\overline{n}|j}}$$

↓
quota di costituzione

Volendo sapere qual è la consistenza del fondo al termine dell' h -esimo periodo, si avrà:

$$K(h) = C \cdot \frac{s_{\overline{h}|j}}{s_{\overline{n}|j}}$$

$$\frac{C}{K(h)} = \frac{Q \cdot s_{\overline{n}|j}}{Q \cdot s_{\overline{h}|j}}$$

Tenendo conto di quanto si deve ogni anno a titolo di interessi

$$C \cdot i$$

si ha che la rata annua costante da pagare sarà:

$$R_{ij} = \overset{\text{quota di costituzione}}{Q} + C \cdot i = \frac{C}{s_{\overline{n}|j}} + C \cdot i = C \left(\frac{1}{s_{\overline{n}|j}} + i \right) = C (\sigma_{\overline{n}|j} + i)$$

↓
 $C \sigma_{\overline{n}|j} + C i$

Nel caso particolare che sia $i=j$, la rata R_{ij} diventa:

$$R_{ii} = Q + Ci = \frac{C}{\sigma_{\bar{m}|i}} + Ci = C\left(\frac{1}{\sigma_{\bar{m}|i}} + i\right) = C(\sigma_{\bar{m}|i} + i)$$

dove

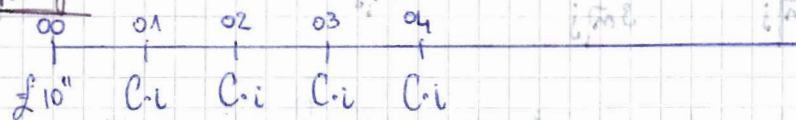
$$\sigma_{\bar{m}|i} + i = \alpha_{\bar{m}|i} \Rightarrow R_i = C \cdot \alpha_{\bar{m}|i}$$

NB: La rata risulta essere uguale a quella di un normale ammortamento progressivo francese con rate costanti.

Si nota come l'ammortamento francese, uguagliando i tassi i e j serve per "addolcire" l'ammortamento americano.

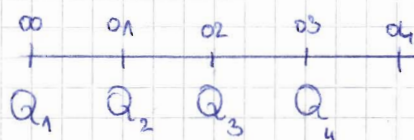
Si usa il tasso i , che è una media tra i tassi i e j di remunerazione e di costituzione.

ESEMPIO prof.



$$i = 0,15$$

$$\text{dove } C \cdot i = 10" \cdot 0,15 = 1.500.000 \text{ £}$$



$$Q = C \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 10" \cdot \frac{1 - \frac{1}{1,15^4}}{0,15} = 2.426.237,53$$

$$\text{La rata complessiva } R_{ij} = Q + Ci = 2.426.237,53 + 1.500.000 = 3.926.237,53$$

ovvero direttamente avremo ottenuto:

$$R_{ij} = C(\sigma_{\bar{m}|i} + i) = 10.000.000(0,242623753 + 0,15) = 3.926.237,53$$

NOTA: per calcolare i si procede per approssimazioni successive

$$A = R \frac{1 + (1+i)^{-n}}{i}$$

$$100 = 3.926.237,53 \left(\frac{1 + (1+i)^{-4}}{i} \right)$$

$$\bar{i} = 0,14 \rightarrow f(\bar{i}) = 10",2$$

$$\bar{i} = 0,13 \rightarrow f(\bar{i}) = 9",9 \Rightarrow 0,14 < \bar{i} < 0,13$$

AMMORTAMENTO TEDESCO

Nella forma di ammortamento detta tedesca, gli interessi vengono corrisposti all'inizio di ciascun periodo, non si tratta di un ammortamento anticipato come il precedente perché soltanto gli interessi vengono pagati in via anticipata.

Non si tratta di una procedura di ammortamento diversa dalle altre, ma di una variante di esse, visto che la possibilità di corrispondere gli interessi anticipati, può essere estesa a tutte le forme di ammortamento.

È chiaro che qui al posto di i si usa il tasso di sconto $d = \frac{i}{1+i}$, infatti la rata posticipata $C \cdot i$ è equivalente a quella anticipata $C \cdot v \cdot i = C \cdot d$ $v = (1+i)^{-1}$

Risulta chiaro che l'ammontare del prestito, nel caso di interessi anticipati, risulta apparentemente C , poiché la prima rata di interesse $C \cdot d$ viene pagata contemporaneamente alla riscossione del capitale prestato, quindi non è C a disposizione del debitore ma $C - Cd = C(1-d) = \frac{C}{(1+i)}$

Si nota come il prestito (rimborsabile a scadenza) di un capitale C al tasso d'interesse posticipato (i) ma con interessi pagati anticipatamente equivale a quello del capitale $C(1-d)$ o $\frac{C}{(1+i)}$ allo stesso tasso, ma con interessi pagati posticipatamente (vedi es. pag. 139 libro)

[Gli interessi vengono calcolati in base alle variazioni del debito

$$QC = \frac{C}{m}$$

Si pagano prima gli interessi poi le rate e le QC .

Gli interessi si calcolano dal debito residuo alla fine dell'anno ma in via anticipata].

ESEMPIO prof

€ 1"

$d=0,1$

$n=4$

(ammortamento italiano con interessi anticipati)

t	C_k	g_k	R_k	D_k	E_k
00	-	100.000	100.000	1000.000	0
01	250.000	75.000	325.000	750.000	250.000
02	250.000	50.000	300.000	500.000	500.000
03	250.000	25.000	275.000	250.000	750.000
04	250.000	0	250.000	0	1000.000

$$\frac{d}{1+d} = b$$

Quindi il prestito di 1" al tasso $d=0,1$ equivale al prestito di

$$100.000 \text{ al tasso } i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,1}{1-0,1} = \frac{0,1}{0,9} = 0,1111$$

$$\frac{C}{(1+i)^t} = (1-d)^t C = bC - C$$