

• RENDITE PERPETUE

Si parla di RENDITA PERPETUA quando il numero di rate è illimitato, ($\rightarrow \infty$).

La somma delle rate è infinita, mentre il valore attuale si riduce tendendo a zero.

DIMOSTRAZIONE:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i} \quad v = (1+i)^{-1}$$

Se $n \rightarrow \infty$ devo calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|i} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

Quindi si ha:

$$R \cdot \frac{1}{i} \quad \text{VALORE DELLA RENDITA PERPETUA (immediata posticipata)}$$

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \quad A_p = R \cdot \frac{1}{i}$$

ESEMPIO:

Stima di un immobile = stima per la capitalizzazione dei redditi futuri illimitati.

Ho un appartamento che mi rende 20.000 € d'affitto all'anno, se il tasso è di $r=2\% \Rightarrow i=0,02$ si ha:

$$R \cdot a_{\overline{\infty}|i} = 20.000 \cdot \frac{1}{0,02} = 1.000.000$$

È una rendita perpetua perché l'affitto lo posso ricevere sempre se l'appartamento è di mia proprietà.

NB: Non è possibile considerare il montante non essendo noto l'istante finale cui riferirsi per la capitalizzazione degli interessi.

- Valore attuale anticipato

$$\ddot{a}_{\overline{m}|i} = (1+i) \cdot a_{\overline{m}|i} = (1+i) \cdot \frac{1}{i} = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i} + 1$$

↓
con $m \rightarrow \infty$

Confrontando la formula ottenuta con

$$\ddot{a}_{\overline{m}|i} = 1 + a_{\overline{m-1}|i}$$

$$\rightarrow a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

(Si può vedere che, appena pagata la prima rata - che, essendo anticipata, contribuisce per il suo valore nominale -, non vi è alcuna differenza tra il caso anticipato e posticipato)

- Valore attuale posticipato differito di t anni

$$t / a_{\overline{\infty}|i} = v^t \cdot a_{\overline{\infty}|i} = \frac{v^t}{i}$$

- Valore attuale posticipato (rendita frazionata)

Ricordando che $a_{\overline{m}|i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} a_{\overline{m}|i}$ e $a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$

si ha

$$a_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\overline{m}|i}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{j(m)} a_{\overline{m}|i} \right) = \frac{i}{j(m)} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{j(m)}$$

Valore attuale anticipato (rendita frazionata)

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} + a_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{j(m)}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}^{(m)} = \left(1 + i_{\frac{1}{m}} \right) \cdot a_{\overline{\infty}|i}^{(m)}$$

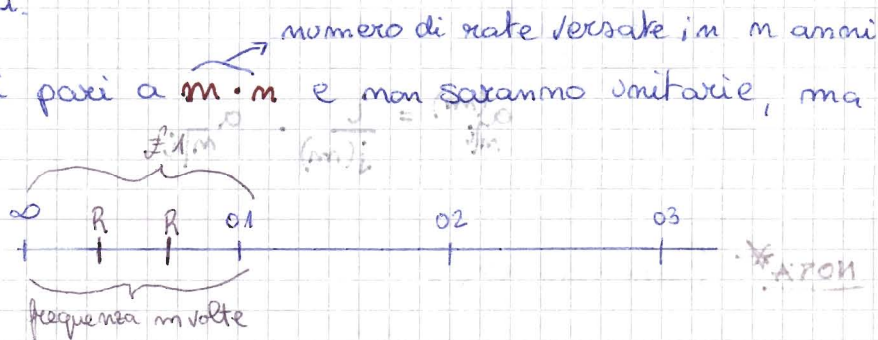
RENDITE FRAZIONATE

$$\frac{j}{(m)i}$$

- Si ha una **RENDITA FRAZIONATA** quando il versamento (o prelievo) delle rate ha luogo con una frequenza superiore ad una volta l'anno (versamenti o prelievi non più annuali ma periodici), in particolare m volte l'anno per n anni.

- Le rate saranno quindi pari a $m \cdot R$ e non saranno unitarie, ma di ammontare $\frac{1}{m}$.

$$R = \frac{1}{m}$$



- La rata $\frac{1}{m}$ viene detta "unitaria annua frazionata" in quanto nell'anno viene pagato un capitale nominale pari ad m volte $\frac{1}{m}$ e dunque unitario (infatti $m \cdot \frac{1}{m} = \frac{m}{m} = 1$).

- Il valore attuale si indica con $a_{\overline{m}|i}^{(m)}$.

2) VALORE ATTUALE POSTICIPATO (VAP) DI UNA RENDITA UNITARIA FRAZIONATA

$$a_{\overline{m}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} a_{\overline{m \cdot m}|i_{1/m}} =$$

Sapendo che $a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - (1+i_{1/m})^{-(m \cdot m)}}{i_{1/m}} \quad \text{NOTA}$$

Sapendo che $j(m) = m \cdot i_{1/m}$

$$= \frac{1 - (1+i)^{-m}}{j(m)} \cdot \left(\frac{i}{j(m)}\right) \quad \text{multiplico per } \frac{i}{j(m)}$$

: ATON

$$A_p \leftarrow \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} \cdot \left[\frac{i}{j(m)}\right] \rightarrow \frac{i}{j(m)} = \text{fattore di correzione f.c.}$$

Quindi:

$$A_p^{(m)} = a_{\overline{m}|i}^{(m)} = \text{f.c.} \cdot A_p = \frac{i}{j(m)} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} = (\text{f.c.}) \cdot (a_{\overline{m}|i})$$

$\frac{i}{j(m)}$ → Riceve il nome di **FATTORE DI CORREZIONE**, che consente di passare dal valore attuale di una rendita unitaria al valore attuale di una rendita frazionata.

Fa crescere la rendita in quanto ho a disposizione anticipatamente una parte delle rate che si possono investire in modo da fruttare di più di quella unitaria.

$$a_{\overline{m}|i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{m}|i}$$

NOTA* Sapendo che:

$$1) 1+i = \left(1 + i_{1/m}\right)^m$$

$$2) (1+i)^{-m} = \left(1 + i_{1/m}\right)^{-m \cdot m}$$

$$3) (1+i) = \left(1 + i_{1/m}\right)^m$$

$$\downarrow$$

$$i = \left(1 + i_{1/m}\right)^m - 1 =$$

$$i = \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1$$

$$a) i_{1/m} = \frac{j(m)}{m}$$

$$b) j(m) = m \cdot i_{1/m}$$

$$c) i_{1/m}^{(m)} = \left(1 + i\right)^{\frac{1}{m}} - 1$$

NOTA:

$(1+i) = \left(1 + i_{1/m}\right)^m$ che, generalizzata diventa:

$$\Rightarrow (1+i)^m = \left(1 + i_{1/m}\right)^{m \cdot m} \Rightarrow \frac{j}{j(m)}$$

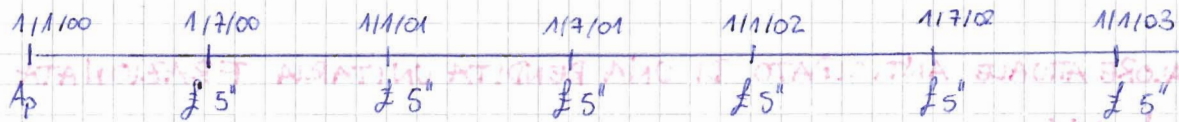
$$- i = \left(1 + i_{1/m}\right)^m - 1 \quad \text{allora} \quad i = \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1 \quad \text{perché} \quad j(m) = m \cdot i_{1/m}$$

$$- i_{1/m} = \left(1 + i\right)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$\left(\frac{j}{j(m)}\right) \cdot \left(\frac{j(m)}{j}\right) = \frac{j(m)}{j} \cdot \frac{j}{j(m)} = 1 \cdot 1 = 1$$

Esempio:

Determinare A_p in data 1/1/00 di una rendita semestrale di rata £ 5.000.000 con decorrenza 1/7/00 e composta da 6 rate con $i = 0,08$.



$$i_{\frac{1}{2}} = (1 + 0,08)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,039230485$$

$$A_p = R \cdot a_{\overline{m}|i} = 5'' \cdot a_{\overline{6}|0,039230485} = 5'' \cdot \frac{1 - (1,039)^{-6}}{0,039} = 26.276.473,65$$

• Usando la formula della rendita frazionata si ha:

$$A_p^{(m)} = 10'' \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{m}|i} = 10'' \cdot a_{\overline{3}|0,08} \cdot \frac{0,08}{2 \cdot i_{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 10'' \cdot \frac{1 - (1,08)^{-3}}{0,08} = 10.961.523 = 26.276.473,37$$

$$\begin{aligned} (1+i) &= \left(1 + i \frac{1}{m}\right)^m \\ (1+i)^{-m} &= \left(\left(1 + i \frac{1}{m}\right)^m\right)^{-m} \end{aligned}$$

b) VALORE ATTUALE ANTICIPATO DI UNA RENDITA UNITARIA FRAZIONATA

$$\ddot{a}_{\overline{m}|i}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \cdot a_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

c) VALORE ATTUALE ANTICIPATO DI UNA RENDITA UNITARIA FRAZIONATA DIFFERITA DI t ANNI

$$t / \ddot{a}_{\overline{m}|i}^{(m)} = v^t \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|i}^{(m)} = v^t (1+i)^{\frac{1}{m}} a_{\overline{m}|i}^{(m)} =$$

$$= v^{t-\frac{1}{m}} a_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

$$1 / \ddot{a}_{\overline{m}|i}^{(m)} = v^{t-1} a_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

$$\text{dove } v^t \cdot (1+i) = (1+i)^{-t} (1+i) = (1+i)^{-t+1} = v^{t-1}$$

d) MONTANTE POSTICIPATO DI UNA RENDITA UNITARIA FRAZIONATA

$$s_{\overline{m}|i}^{(m)} = (1+i)^m a_{\overline{m}|i}^{(m)} = (1+i)^m \cdot \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{m}|i}^{(m)} =$$

$$= \frac{i}{j(m)} \cdot s_{\overline{m}|i}$$

Essendo

$$e_{\overline{m}|i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} a_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

$$s_{\overline{m}|i} = (1+i)^m a_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

$$s_{\overline{m}|i}^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \cdot s_{\overline{m}|i}$$

e) MONTANTE ANTICIPATO DI UNA RENDITA UNITARIA FRAZIONATA

$$\ddot{s}_{\overline{m}|i}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} s_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

oppure:

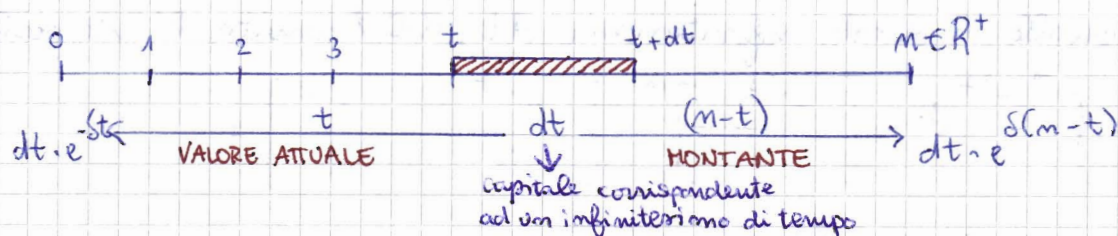
$$\ddot{s}_{\overline{m}|i}^{(m)} = (1+i)^m \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|i}^{(m)}$$

RENDITA CONTINUA

Per definizione, la rendita continua è il caso limite di una rendita frazionata, al tendere all'infinito del numero m delle rate pagate nel corso degli n anni.

In genere si considera UNITARIA nel senso che nell'anno si paga un capitale nominale unitario attraverso il pagamento di somme che, nel corso dell'anno, avviene in modo continuo e uniforme.

In questa situazione non ha senso distinguere le rendite anticipate da quelle posticipate, perché il periodo è infinitesimo (l'istante finale di ciascuno si confonde con quello iniziale).



- Per quanto riguarda il valore attuale si pone:

$$\bar{a}_{\overline{m}|i} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\overline{m}|i}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_{\overline{m}|i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{i}{j(m)} \cdot a_{\overline{m}|i} = \frac{i}{\lim_{m \rightarrow \infty} j(m)} \cdot a_{\overline{m}|i} = \frac{i}{\lim_{m \rightarrow \infty} j(m)} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} =$$

$$= \frac{i}{\delta} \cdot a_{\overline{m}|i}$$

Ricordando che $\lim_{m \rightarrow \infty} j(m) = \delta$ e che $i = e^{\delta} - 1$ otteniamo:

$$\bar{a}_{\overline{m}|i} = \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} \cdot \frac{1 - (1 + e^{\delta} - 1)^{-m}}{e^{\delta} - 1} = \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta}$$

In definitiva, il VALORE ATTUALE di una rendita continua costante unitaria annua immediata di durata n anni, è

$$\bar{a}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\delta} \cdot a_{\overline{n}|i}$$

dove $\frac{i}{\delta}$ è il FATTORE DI CORREZIONE per rendite continue (c.v.d.)

ALTRA DIMOSTRAZIONE

Allo stesso risultato si perviene considerando che:

$$\bar{a}_{m|i} = \int_0^m e^{-\delta t} dt$$

Infatti, per definizione di rendita unitaria continua, il capitale pagato nell'intervallo di tempo $(t, t+dt)$, se l'unità di misura del tempo è l'anno, è pari a dt (elemento di rendita).

Se tale somma venisse pagata nell'istante t , il suo valore attuale, al tempo 0, in base alla forza d'interesse δ , sarebbe $e^{-\delta t} dt$.

Il valore attuale della rendita si ottiene sommando le rate $e^{-\delta t}$ di ciascun intervallo di durata infinitesima dt , cioè tramite l'integrale:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{m|i} &= \int_0^m e^{-\delta t} dt = \left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \right]_0^m = \left[\frac{e^{-\delta t}}{-\delta} - \frac{e^{-\delta \cdot 0}}{-\delta} \right] = \\ &= \left[\frac{-e^{-\delta m}}{\delta} + \frac{1}{\delta} \right] = \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} = \frac{1 - \exp(-\delta m)}{\delta} \end{aligned}$$

(si fa l'integrale perché abbiamo capitali infinitesimi in istanti infinitesimi)

Essendo $e^{\delta} = (1+i)$, e moltiplicando per i numeratore e denominatore si ottiene:

$$\bar{a}_{m|i} = \frac{i}{\delta} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} = \frac{i}{\delta} \cdot a_{m|i} \quad \text{c.v.d.}$$

dove $\frac{i}{\delta}$ è il fattore di conversione della rendita continua.

$$\bar{a}_{m|\delta} = \frac{1}{\delta} = \bar{a}_{m|0}$$

La risoluzione dell'integrale è avvenuta nel seguente modo:

$$\int_0^m e^{\delta(m-t)} dt$$

posto $\delta(m-t) = x$ $(-dx = -\delta dt)$ per cui $dt = -\frac{dx}{\delta}$

$$\begin{aligned} \int_0^m e^x \left(-\frac{dx}{\delta}\right) &= \int_{\delta(m)}^{\delta(m-0)} -\frac{e^x}{\delta} dx = -\frac{1}{\delta} \int_{\delta(m)}^{\delta(m-0)} e^x dx = \\ &= -\frac{e^x}{\delta} = -\frac{e^{\delta(m-t)}}{\delta} \Big|_0^m = -\frac{e^{\delta(m-m)}}{\delta} + \frac{e^{\delta(m-0)}}{\delta} = \\ &= -\frac{1}{\delta} + \frac{e^{\delta m}}{\delta} = \frac{e^{\delta m} - 1}{\delta} \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x \\ \int e^{kx} dx &= \frac{e^{kx}}{k} \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Il **MONTANTE** ($\bar{s}_{m|i}$) di una rendita continua costante unitaria annua immediata, di durata n anni, è il valore equivalente di una rendita alla fine dei versamenti.

RENDITA ANTICIPATA = RENDITA POSTICIPATA (infatti non ha senso distinguerle, vedi 89)

Essendo l'elemento di rendita pari a $\exp \delta(n-t)$, cioè $e^{\delta(n-t)}$, il montante sarà la somma degli infiniti elementi di rendita nell'intervallo $[0, n]$.

$$\begin{aligned}\bar{s}_{m|i} &= \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \left[\frac{-e^{\delta(n-t)}}{\delta} \right]_0^n = \left[\frac{-e^{\delta(n-t)}}{\delta} \cdot \frac{-e^{\delta(n-0)}}{\delta} \right] = \\ &= -\frac{1}{\delta} + \frac{e^{\delta n}}{\delta} = \left[\frac{\exp(\delta n) - 1}{\delta} \right] = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} \cdot \frac{i}{i} = s_{m|i} \cdot \frac{i}{\delta}\end{aligned}$$

VALORE DELLA PRIMITIVA per la verifica del valore dell'integrale:

$$\begin{aligned}D \left[\frac{-e^{\delta(n-t)}}{\delta} \right] &= -\frac{1}{\delta} \cdot D e^{\delta(n-t)} = \frac{1}{\delta} e^{\delta(n-t)} \cdot \log_e e = \\ &= \frac{-e^{\delta(n-t)}}{\delta} + e^{\delta(n-t)} \quad \text{c.v.d.}\end{aligned}$$

Poiché $e^{\delta} = 1+i$

Da cui, moltiplicando per i numeratore e denominatore si ottiene:

$$\bar{s}_{m|i} = \frac{i}{\delta} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{i}{\delta} \cdot s_{m|i}, \text{ essendo } \frac{i}{\delta} \text{ il FATTORE DI CORREZIONE}$$

delle rendite continue.

$$\bar{s}_{m|i} = \bar{a}_{m|i} (1+i)^n = \bar{a}_{m|i} \cdot e^{\delta n} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \cdot e^{\delta n} = \frac{e^{\delta n} - e^{-\delta n + \delta n}}{\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}$$

oppure:

considerato che il M al tempo n della dt riscossa tra t e $t+dt$ è uguale a $e^{\delta(n-t)} dt$, si ha

$$\begin{aligned}\bar{s}_{m|i} &= \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \left[\frac{-e^{\delta(n-t)}}{\delta} \right]_0^n = \frac{-e^{\delta(n-n)}}{\delta} + \frac{e^{\delta(n-0)}}{\delta} = \frac{1}{\delta} + \frac{e^{\delta n}}{\delta} = \\ &= \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}\end{aligned}$$

PROBLEMI RELATIVI ALLE RENDITE

- Ricerca del tasso $\rightarrow$ è legata al TIR
- Numero delle rate $\rightarrow$ vedere il libro

(NB: il secondo problema non necessariamente si deve risolvere come rendita)

$$A = R \cdot a_{\overline{m}|i}$$

Esercizio: abbiamo un debito di 10^4 , con rata di 800.000 e il tasso $i = 0,10$. Qual è m ?

$$\left. \begin{array}{l} D = 10^4 \\ m = ? \\ i = 0,10 \\ R = 800.000 \end{array} \right\}$$

non ha soluzione perché la rata di 800.000 non comprende la quota interessi pari a $C \cdot i = 10^4 \cdot 0,10 = 1.000.000$. La rata dovrebbe essere di almeno 1.000.000, anche solo 1.000.001 €.

Esercizio

$$\left. \begin{array}{l} D = 10.000.000 \\ i = 0,10 \\ R = 2.000.000 \\ m = ? \end{array} \right\}$$

$$10^4 = 2^4 \cdot a_{\overline{m}|i} =$$

$$10^4 = 2^4 \cdot \frac{1 - (1,1)^{-m}}{0,1} =$$

$$\frac{10^4 \cdot 0,1}{2^4} = 1 - (1,1)^{-m}$$

$$0,5 = 1 - (1,1)^{-m} \Rightarrow 0,5 - 1 = - (1,1)^{-m} \Rightarrow$$

$$-0,5 = - (1,1)^{-m} \Rightarrow 1,1^{-m} = 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{10} 1,1^{-m} = \log_{10} 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m \cdot \log_{10} 1,1 = \log_{10} 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m = \frac{\log_{10} 0,5}{\log_{10} 1,1} \Rightarrow m = - \frac{\log_{10} 0,5}{\log_{10} 1,1} = 4,2725413$$

Il numero m non sarà intero ma lo si può indicare approssimativamente in eccesso o in difetto; oppure si calcola R_f :

RATA DI SALDO, si vede cosa si estingue con m intero, ciò che rimane si paga alla fine (o all'inizio), problema che si può risolvere solo tramite le rendite.

$\begin{array}{ccccccc} 10^4 & 2^4 & 2^4 & 2^4 & 2^4 & R_f & \text{si trova con l'equivalenza finanziaria} \\ | & | & | & | & | & | & \\ \hline & & & & & & R_f = \frac{10^4 - 2 \cdot a_{\overline{4}|0,1}}{1,1^4} \end{array}$

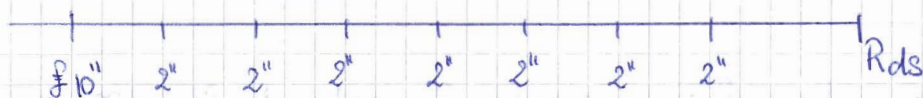
Metodi di adattamento

1)

$$m = 7,24 \begin{cases} m=7 \Rightarrow R = 10'' \cdot \alpha_{7|0,1} = 2.054.055 \\ m=8 \Rightarrow R = 10'' \cdot \alpha_{8|0,1} = 1.874.440 \end{cases}$$

Questo metodo non viene molto usato

2) RATA DI SALDO



$$10'' = 2 \cdot \alpha_{7|0,1} + R_{ds} \cdot v^8 \Rightarrow R_{ds} = \frac{10'' - 2 \cdot \alpha_{7|0,1}}{v^8}$$

$$R_{ds} = \frac{10'' - (2'' \cdot 4,86841882)}{(1,1)^{-8}} = 564.111,8904$$

Al numeratore si ha il debito di $10''$, meno quello che ha pagato, che è $2'' \cdot 4,86841882$, che dà il residuo da pagare.

al denominatore si ha $\frac{1}{v}$, che è π , perché R_{ds} lo pago 8 periodi

dopo, ^{quindi} capitalizzo il residuo da pagare ($10'' - 2'' \cdot 4,86841882$) per 8 periodi, o divido per v^{-8} (infatti $\pi = \frac{1}{v}$)

$$\frac{(A_j - R) \cdot \alpha_{j|0,1}}{v^j} = A$$

PROBLEMI RELATIVI ALLE RENDITE

• CALCOLO AMMONTARE RATA

Noti A_p valore attuale posticipato, n durata della rendita in anni e il tasso annuo di valutazione i , la rata si calcola con la formula inversa

$$A_p = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$R = \frac{A_p}{a_{\overline{n}|i}} = A_p \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$\text{dove } a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

• DETERMINAZIONE NUMERO RATE

Dal punto di vista formale, il calcolo di n in funzione di

A_p = valore attuale

R = rata

i = tasso di valutazione

$$A_p = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

- moltiplico ambo i membri per i

$$A \cdot i = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot i$$

$$A i = R [1 - (1+i)^{-n}]$$

$$\frac{iA}{R} = 1 - (1+i)^{-n}$$

$$\frac{iA}{R} - 1 = -(1+i)^{-n} \quad - \text{moltiplico ambo i membri per } -1 \Rightarrow 1 - \frac{iA}{R} = (1+i)^{-n}$$

- applico i logaritmi

$$\log \left(1 - \frac{iA}{R} \right) = \log (1+i)^{-n} \Rightarrow \log \left(\frac{R - iA}{R} \right) = -n \log (1+i)$$

$$\Rightarrow \frac{\log \left(\frac{R - iA}{R} \right)}{\log (1+i)} = -n \Rightarrow n = - \frac{\log \left(\frac{R - iA}{R} \right)}{\log (1+i)}$$