RENDITE CERTE

1. Definizione

Si chiama **RENDITA** una successione di versamenti o prelevamenti di capitali nel tempo.

Le **RATE** di una rendita sono i singoli capitali alle diverse scadenze.

Sono **RENDITE CERTE** quelle in cui le rate sono fissate a priori nel numero, nell'ammontare e nelle scadenze; nel caso contrario si hanno **RENDITE ALEATORIE**.

Una rendita si dice **PERIODICA** quando le diverse rate sono equintervallate fra loro. L'intervallo fra una rata e l'altra è detto **PERIODO DELLA RENDITA**.

Se il pagamento delle rate avviene alla fine di ciascun periodo la rendita viene detta **POSTICIPATA**. Se invece il pagamento delle rate avviene all'inizio di ciascun periodo, la rendita è detta **ANTICIPATA**.

A seconda poi che il numero delle rate sia finito o infinito, la rendita può essere **TEMPORANEA** o **PERPETUA**.

La rendita, infine, è detta **COSTANTE** se tutte le rate sono dello stesso ammontare, **VARIABILE** nel caso contrario. In particolare, una rendita **UNITARIA** è una rendita costante le cui rate sono di ammontare unitario.

2. IL VALORE DI UNA RENDITA

Il valore di una rendita si ottiene riportando ciascuna rata all'istante di valutazione mediante un'operazione di capitalizzazione o di attualizzazione. È quindi necessaria la scelta di un regime finanziario e di un tasso d'interesse oltre che di un istante di riferimento.

Mentre il regime finanziario standard è quello dell'interesse composto, la discrezionalità del valutatore si esercita piuttosto sulla scelta del tasso d'interesse

In altri termini:
la valutazione di una rendita consiste nel determinare quale sia la somma che, con riferimento ad un istante fissato, può essere considerata finanziariamente equivalente ad essa.

Questa somma si dirà VALORE DELLA RENDITA (o valore capitale) ⟶

A seconda dell'istante di valutazione possiamo distinguere tra 4 valori della rendita:

A_p: VALORE ATTUALE POSTICIPATO — è il valore della rendita calcolato un periodo prima del versamento della prima rata

A_a: VALORE ATTUALE ANTICIPATO — è il valore della rendita calcolato nell'istante di versamento della prima rata

M_p: MONTANTE POSTICIPATO — è il valore della rendita calcolato nell'istante di pagamento dell'ultima rata.

M_a: MONTANTE ANTICIPATO — è il valore della rendita calcolato un periodo dopo il pagamento dell'ultima rata. (= montante posticipato differito di 1 anno)

→ Si ottiene riportando ciascuna rata al tempo associato per la valutazione, mediante le consuete operazioni di capitalizzazione e di anticipazione.
È necessario stabilire non solo un istante di riferimento, ma anche una legge finanziaria.

La valutazione consiste nel riportare finanziariamente tutte le rate ad una scadenza comune (epoca di valutazione) calcolandone l'importo monetario equivalente
L'omogeneità dei dati consente di ottenere espressioni compatte, funzioni del numero delle rate e del tasso d'interesse
Possono calcolarsi:

1) MONTANTE DI UNA RENDITA → Valore capitale riferito ad una qualsiasi epoca di valutazione NON ANTERIORE alla fine dell'ultimo periodo (epoca di pagamento dell'ultima rata) e si ottiene capitalizzando ad esso tutte le rate.

2) VA DI UNA RENDITA → Valore capitale di una rendita riferito ad una qualsiasi epoca non successiva alla decorrenza (epoca di pagamento della prima rata) e al più coincidente. Si ottiene anticipando all'istante di valutazione tutte le rate.

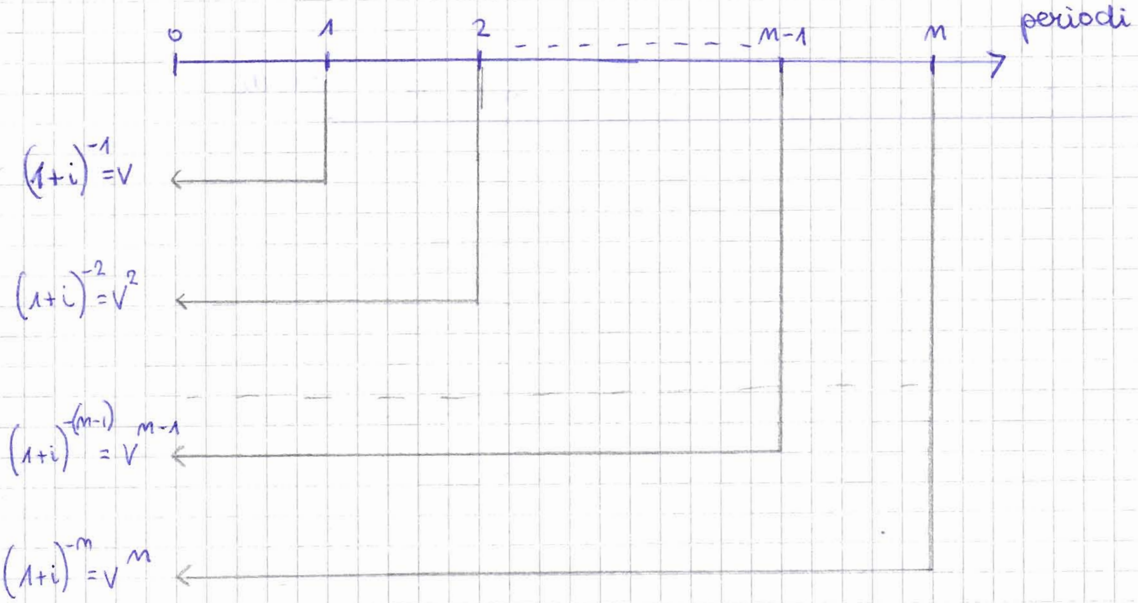
2) VALORE ATTUALE POSTICIPATO $(A_p) = a_{\overline{n}|i}$

Il valore attuale di una rendita unitaria annua posticipata immediata. E' il valore equivalente alla rendita calcolato un periodo prima il versamento della prima rata.

Esso è dato dalla somma dei valori attuali delle singole rate:

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n \qquad v = (1+i)^{-1}$$

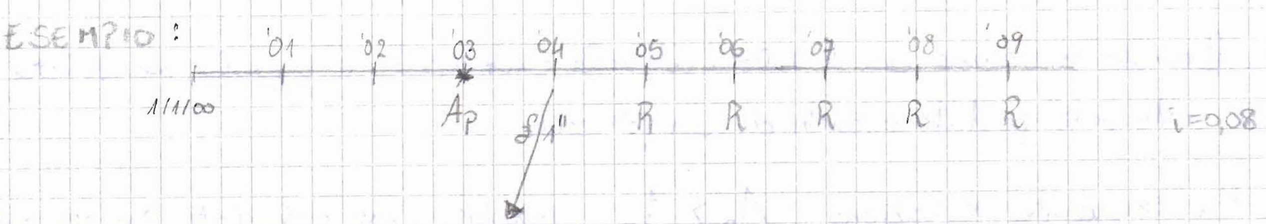
Questa somma forma una progressione geometrica di ragione v.



$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Questo può definirsi come il valore attuale posticipato di una rendita unitaria costituita da n rate al tasso i.

ESEMPIO:



$C_{1/1/03} = R\, a_{\overline{6}|0,08}$ → VA posticipato di una rendita unitaria composta da 6 rate e valutata al tasso 8%.

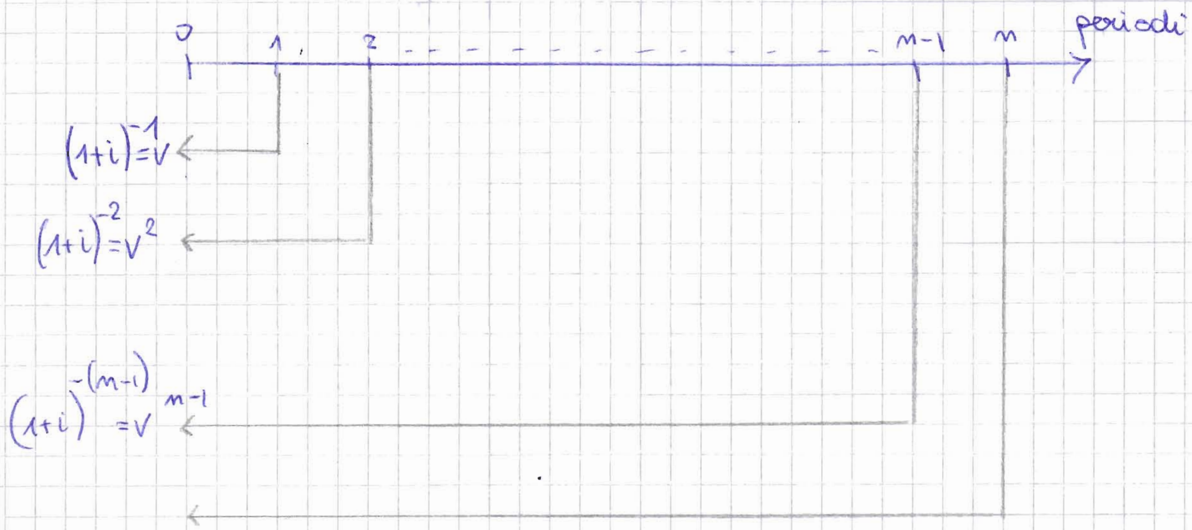
6) VALORE ATTUALE ANTICIPATO $(A_a) = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = A_p(1+i)$

Il valore attuale di una rendita unitaria annua anticipata immediata.
E' il valore equivalente della rendita calcolato nell'istante di versamento della prima rata.

In questo caso ogni rata va scontata per un anno in meno rispetto al caso di una rendita posticipata.

Avremo quindi:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + \dots + v^{n-1}$$



da cui:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}}{1+i}} = (1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$1-(1+i)^{-n} \cdot \frac{1+i}{i}$$

quindi:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

Dalla formula si deduce che il valore attuale anticipato è uguale al valore attuale posticipato portato avanti di un periodo.

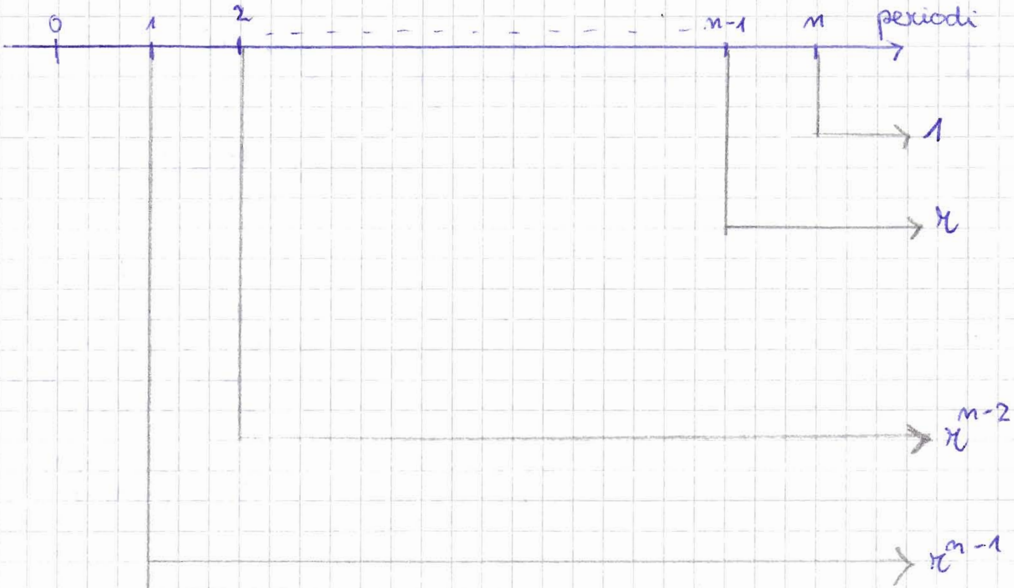
Vale la seguente relazione $A_a > A_p$, perché viene calcolato un periodo dopo.

c) MONTANTE DI UNA RENDITA UNITARIA ANNUA POSTICIPATA (M_p)

Il montante di una rendita unitaria annua posticipata immediata è il valore equivalente della rendita determinato nell'istante in cui si versa l'ultima rata. (dopo aver fissato il periodo)

Esso è dato dalla somma dei montanti delle singole rate:

$$s_{\overline{n}|i} = r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1$$



In questo caso la prima rata va capitalizzata per n-1 anni, la seconda per n-2, la penult. ma per uno solo, e l'ultima viene pagata nello stesso istante.

Trattandosi anche in questo caso di una progressione geometrica che ha 1 come primo termine:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad r = 1+i$$

$$\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{(1+i)^n-1}{1+i-1} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

quindi:

$$\boxed{s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}}$$

Dunque: $M_p = A_p \cdot u^n = R \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^n = R \cdot \frac{u^n - v^n \cdot u^n}{i} = R \cdot \frac{(1+i)^n-1}{i} =$

ES: $1.000.000 \cdot \frac{(1,06)^7-1}{0,06} = 8.393.837,65$

questo può definirsi come il montante posticipato di una rendita di rata unitaria al tasso i.

NOTA:

La stessa formula può ricavarsi sfruttando la scindibilità dell'interesse composto: il montante uguaglia infatti il V.A. capitalizzato per l'intervallo di tempo tra i due rispettivi istanti di riferimento (ossia l'intera durata della rendita)

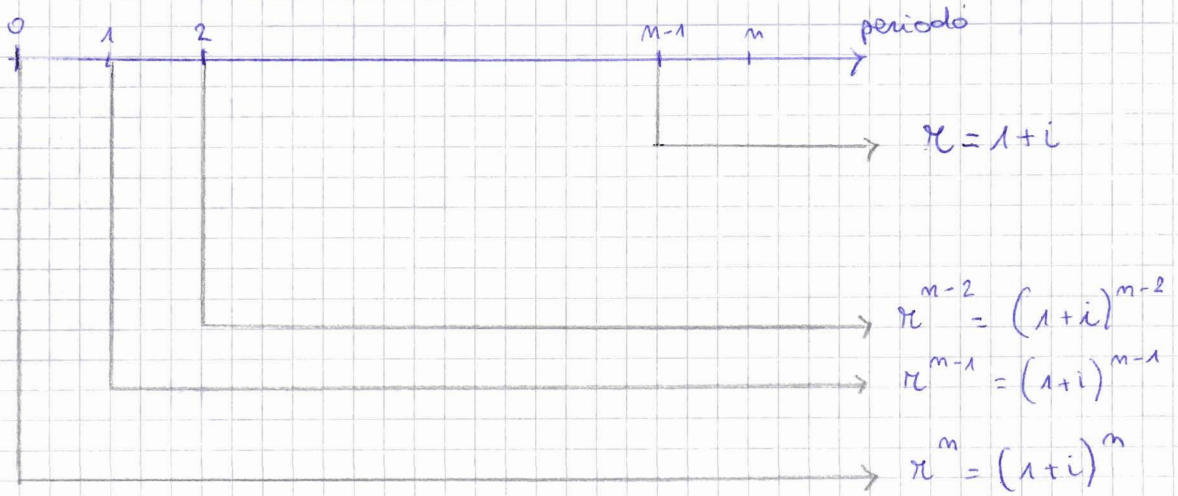
$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|i}$$

D) MONTANTE ANTICIPATO $(M_a) = M_p \cdot u = R \, s_{\overline{n}|i} \cdot u = R \, \ddot{s}_{\overline{n}|i}$

Il montante di una rendita unitaria annua anticipata immediata, è il valore equivalente della rendita, calcolato in un periodo dopo il pagamento dell'ultima rata (= montante posticipato differito di 1 anno)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = r^n + r^{n-1} + \ldots + r = r \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$



$$r = (1+i)$$

Quindi:

$$\boxed{s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)}$$

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)}$$

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1}$$

Il montante anticipato è quindi uguale al montante posticipato portato avanti di un periodo.

In forza della scindibilità abbiamo:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} \rightarrow$$ cioè è uguale al VA anticipato capitalizzato di n periodi

$R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ $\quad M_a = M_p \cdot u = 1.000.000 \cdot \ddot{s}_{\overline{7}|0,06} = 1.000.000 \cdot s_{\overline{7}|0,06} \cdot (1+i) = 8.897.467,909$

Per poter tracciare il grafico del montante occorre innanzitutto verificare se la funzione è crescente o decrescente e quindi calcolare la derivata prima.

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}$$

$$D' s_{\overline{n}|i} = 0 + 1(1+i)^0 + 2(1+i)^1 + \dots + (n-1)(1+i)^{n-2}$$

Essendo $D' s_{\overline{n}|i} > 0$ la funzione è crescente

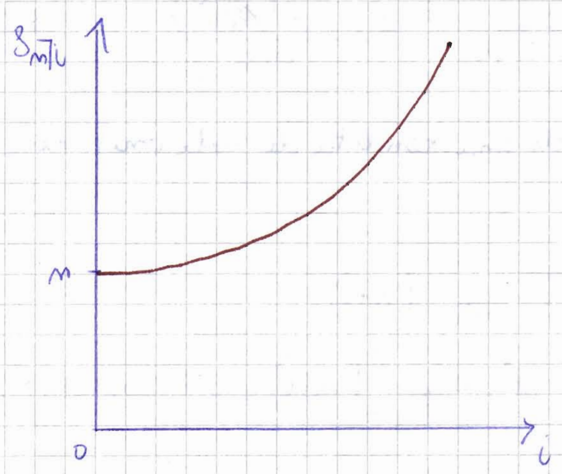
Per verificare la concavità calcoliamo adesso la derivata seconda:

$$D'' s_{\overline{n}|i} = 2(1+i)^0 + \dots + (n-2)\left[(n-1)(1+i)^{n-3}\right]$$

Essendo $D'' s_{\overline{n}|i} > 0$ la funzione è concava verso l'alto.

Per $i = 0$ $\quad s_{\overline{n}|i} = n$, quindi la curva parte da n.

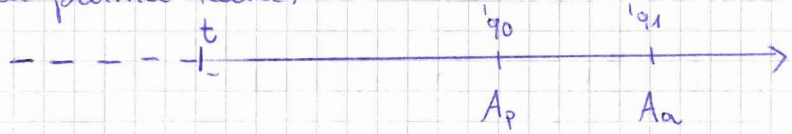
Per $i > 0$ $\quad s_{\overline{n}|i} > n$ quindi la curva è crescente.



$s_{\overline{n}|i}$ è funzione crescente di n e funzione crescente di i.

RENDITE DIFFERITE

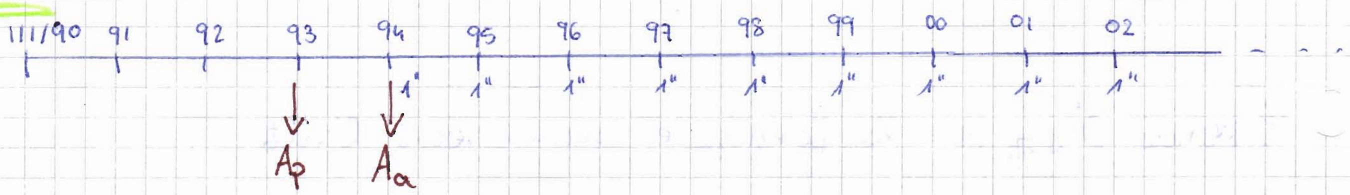
È una successione di valori che vengono valutati un certo numero di periodi prima della prima rata.



Il simbolo **a** ha un differimento e una temporaneità.
La troviamo inserita nel simbolo figurato **m/a** (da leggersi "a differito m")

La rendita differita cambia a seconda dell'istante di valutazione.

ESEMPIO:



- Il VALORE ATTUALE POSTICIPATO di una rendita di rata unitaria composta da 7 rate al tasso $i = 0{,}06$ è:

$$A_p = R \cdot a_{\overline{m}|i} = 1'' \cdot a_{\overline{7}|0,06} = 1'' \cdot \frac{1-(1{,}06)^{-7}}{0{,}06} = 1 \cdot 5{,}58238144 = 5{,}582381{,}44$$

- Il VALORE ATTUALE ANTICIPATO di una rendita di rata unitaria composta da 7 rate al tasso $i = 0{,}06$ è:

$$A_a = A_p \cdot (1+i) = R \cdot a_{\overline{m}|i} \cdot (1+i) =$$

$$= R \cdot a_{\overline{7}|0,06} \cdot (1+0{,}06) = 1'' \cdot a_{\overline{7}|0,06} \cdot (1{,}06) = 5.582.381{,}44 \times 1{,}06 = 5.917.324{,}826$$

In altri termini:

$$A_a = a_{\overline{m}|i}\,(1+i) = \ddot{a}_{\overline{m}|i}$$

$$A_a = C_{1/1/94} = C_{1/1/93} \cdot (1+i)$$

In generale vale la seguente

$$A_a > A_p \qquad \ddot{a}_{\overline{m}|i} > a_{\overline{m}|i}$$

- Se ci riferiamo all'1/1/90 come istante di valutazione ci riferiamo alle **RENDITE DIFFERITE**.

Ora, guardando l'asse dei tempi, se considero $A_a(1/1/94)$ vado indietro di 4 periodi; se considero $A_p(1/1/93)$ vado indietro di 3 periodi [Si ricordi che ho preso come riferimento 1/1/90].

La rendita sarà:

$$m/a = a_{\overline{n}|i} \cdot v^3 \qquad\qquad m/a = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot v^4$$

cioè

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$- \; C_{1/1/90} = m/a = a_{\overline{n}|i} \cdot v^3 = A_p \cdot v^3 = 5\,582\,381{,}44 \cdot (1{,}06)^{-3} = 4\,684\,074{,}7$$

$$- \; C_{1/1/90} = m/a = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot v^4 = 5582381{,}44 \cdot (1{,}06)^{-4} = 4{,}421768{,}96$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

Poiché ogni rata va anticipata di m periodi (per esempio t anni) avremo:

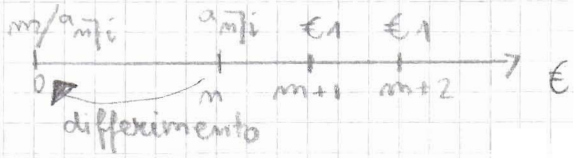
$$m/a_{\overline{n}|i} = v^{t+1} + v^{t+2} + \dots + v^{t+n} = v^t \left(v + v^2 + \dots + v^n\right)$$

e dunque:

$a_{\overline{n}|i}$ = valore scontato al tempo m

- RENDITA UNITARIA ANNUA POSTICIPATA DIFFERITA DI T ANNI

$$t/a_{\overline{n}|i} = v^t \cdot a_{\overline{n}|i}$$



- RENDITA UNITARIA ANNUA ANTICIPATA DIFFERITA DI T ANNI

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^t + v^{t+1} + \dots + v^{t+n-1} = v^t\left(1 + v + \dots + v^{n-1}\right)$$

da cui:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^t \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

oppure:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^t (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\; t/a_{\overline{n}|i}$$

Dato che una rendita anticipata differita di t anni coincide con una rendita posticipata differita di $t-1$ anni, si ha:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = t-1/a_{\overline{n}|i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot v^{n} = a_{\overline{n}|i} \cdot v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot v^{n} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot v \cdot v^{n-1} \Rightarrow \ddot{a}\, v^{n} = \ddot{a}\, v^{n}$$

c.v.d

NOTA:

Il differimento riguarda la decorrenza dell'inizio della rendita e quindi, mentre influisce sul valore attuale, non altera per nulla il montante, essendo questo indipendente da quanto avviene antecedentemente alla prima rata.

Tornando all'esempio, per calcolare $\ddot{a}_{\overline{7}|0,06}$ devo togliere un periodo e aggiungere 1 € ottenendo:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1 \Rightarrow A_a = A_p + 1$$