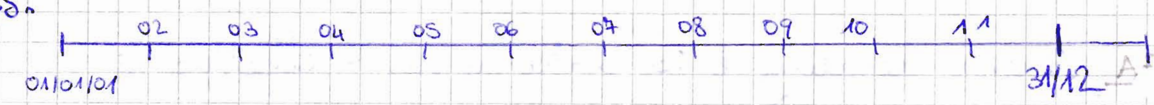
LE RENDITE

La rendita è una successione di versamenti o prelevamenti nel tempo.

Es.



$i = 0,08$

Per sommare i capitali riferiti a periodi diversi nel tempo devo secondo il principio dell'equivalenza finanziaria) riportarli allo stesso istante di valutazione per poterli valutare complessivamente attraverso operazioni di sconto (attualizzazione) o di interesse (capitalizzazione).

$$C_{1/1/01} = 1'' + 3''(1+i)^{-6} + 4''(1+i)^{-10} = 4,743282833$$

$$C_{1/1/10} = 4,743282833\,(1+i)^{10} = 10,24039188$$

Non c'è differenza finanziaria tra $C_{1/1/01}$ e $C_{1/1/10}$, sono equivalenti perchè è lo stesso capitale, riferito a periodi diversi.
Infatti:

$$C_{1/1/01} = 10,24039188\,(1+i)^{-10} = 4,743282833$$

VERSAMENTI

Noi si applica il tasso di sconto utilizzato per i versamenti di breve scadenza.

L'operatore che deve valutare deve scegliere un tasso d'interesse adeguato (media tra i depositi e le scoperture).

FATTORE DI SCONTO COMPOSTO → serve a portare il capitale indietro nel tempo.

$$C_t = (1+i)^{-t} < 0 \qquad C_t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

Per portare il capitale avanti nel tempo si usa il FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE.

I due risultati sono equivalenti, infatti riportati allo stesso istante di valutazione i due capitali danno lo stesso montante.

RENDITA FINANZIARIA

Dicesi rendita una successione di versamenti con rate uguali e con scadenze costanti.

La **SCADENZA** di una rendita è la data in cui si effettua il versamento (o prelevamento).

Il **PERIODO** di una rendita è l'intervallo di tempo intercorrente tra una scadenza e la successiva (o precedente).

La **RATA** è il singolo capitale da versare o riscuotere alla scadenza.

La rendita può essere ANTICIPATA o POSTICIPATA:

la rata è versata alla fine del periodo

la rata è versata all'inizio del periodo

Si definisce **VALORE ATTUALE DELLA RENDITA** la somma che, impiegata a partire dall'istante di riferimento e in base alla legge usata per la valutazione stessa, risulta esattamente sufficiente a produrre tutte le rate della rendita, alle scadenze previste.

Si definisce **MONTANTE DELLA RENDITA** il capitale che si ottiene se tutte le rate vengono, appena riscosse e fino all'istante finale, investite al tasso impiegato per la valutazione.

Si usa indicare il valore attuale post di una rendita unitaria con $a_{\overline{n}|i}$ che moltiplicato per il valore R da la rendita effettiva.

$a_{\overline{n}|i}$ è la rendita, o meglio il valore attuale posticipato di una rendita di n rate unitario al tasso i.

$a_{\overline{n}|i} \rightarrow$ VALORE ATTUALE POSTICIPATO $= \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$R \cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow$ RENDITA EFFETTIVA (A_p)

- VALORE ATTUALE POSTICIPATO

$$A_p = a_{\overline{n}|i} = \left(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} + v^n\right)$$

- VALORE ATTUALE ANTICIPATO

$$A_a = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \left(1 + v^1 + v^2 + \ldots + v^{n-1}\right)$$

- MONTANTE RENDITA POSTICIPATA

$$M_p = S_{\overline{n}|i} = \left(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1\right)$$

- MONTANTE RENDITA ANTICIPATA

$$M_a = \ddot{S}_{\overline{n}|i} = \left(r^n + r^{n-1} + \ldots + r\right)$$

La rendita può essere

IMMEDIATA

DIFFERITA: quando il tempo di riferimento della valutazione (t) precede quello di decorrenza della rendita (t_0)

V. A.:

1) RENDITA UNITARIA ANNUA POSTICIPATA IMMEDIATA, di durata n anni:

$$a_{\overline{n}|i}$$

2) RENDITA UNITARIA ANNUA ANTICIPATA IMMEDIATA di durata n anni:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} \quad \text{oppure} \quad \ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\, a_{\overline{n}|i}$$

3) RENDITA UNITARIA ANNUA POSTICIPATA, di durata n anni, DIFFERITA DI t ANNI:

$$t/a_{\overline{n}|i} = v^t a_{\overline{n}|i}$$

4) RENDITA UNITARIA ANNUA ANTICIPATA, di durata n anni, DIFFERITA DI t anni:

$$t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^t \ddot{a}_{\overline{n}|i} \quad \text{oppure} \quad t/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\, t/a_{\overline{n}|i}$$

MONTANTE:

1) RENDITA UNITARIA ANNUA POSTICIPATA IMMEDIATA di durata n anni

$$S_{\overline{n}|i}$$

2) RENDITA UNITARIA ANNUA ANTICIPATA IMMEDIATA, di durata n anni:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

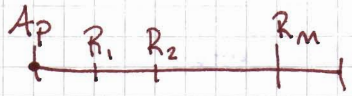
RENDITE COSTANTI TEMPORANEE $\begin{cases} \text{Rendite costanti immediate} \\ \text{Rendite costanti differite} \end{cases}$

NB :

- Ha senso parlare di montante di una rendita costante temporanea immediata
- Non ha senso parlare di montante di una rendita costante perpetua né di una rendita costante temporanea differita.

Dunque:

-VALORE ATTUALE POSTICIPATO (Ap)



Il valore della rendita (capitale) equivalente valutato un periodo prima del versamento della prima rata.

Determinare il valore equivalente della rendita:

$a_{\overline{9}|0,065} \Rightarrow$ a figurato n al tasso i $\quad a_{\overline{n}|i}$

n: numero di periodi che compongono la rendita

$a_{\overline{n}|i}$ $\qquad n \geq 0$

valore attuale posticipato di una rendita di rata unitaria composta da n rate e valutata al tasso i.

Per cui $a_{\overline{9}|0,065}$ è il valore attuale posticipato di una rendita di rata unitaria composta da 9 rate e valutata al tasso 6,5%.

$\boxed{a_{\overline{9}|0,065} = v + v^2 + \dots + v^9}$ $\longrightarrow$ questa sommatoria rappresenta lo sconto

$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + \dots + v^n = \sum$ V.A. RATE $\rightarrow$ somma di n termini di una progressione geometrica di ragione $v (\neq 1)$, con v come primo termine.

Si tratta di una progressione geometrica: successione qualunque di n termini in cui il rapporto tra un fattore precedente e il successivo è costante, tale rapporto si indica con q e prende il nome di **RAGIONE**

FORMULE:

$q = V =$ ragione

$n = q$

$a_i = V$

per $q < 1$ $\boxed{S = a_i \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

per $q > 1$ $\boxed{S = a_i \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}}$

FORMULE PER CALCOLARE UNA SOMMA IN PROGRESSIONE GEOMETRICA

NB: In una progressione geometrica, la somma di n termini consecutivi si ottiene moltiplicando il primo termine per una frazione al cui numeratore vi è la differenza tra l'unità e la ragione elevata a n, e al cui denominatore vi è la differenza tra l'unità e la ragione.

$V = \dfrac{1}{1+i}$

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = V \cdot \frac{1-V^n}{1-V}} = \frac{1-V^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = V \cdot \frac{1-V^n}{1-V} \cdot \frac{u}{u}$$ da cui si ricava:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}}{1+i}} = \frac{1}{\cancel{1+i}} \cdot 1-(1+i)^{-n} \cdot \frac{\cancel{1+i}}{i} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

quindi infine

$$① \quad \boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

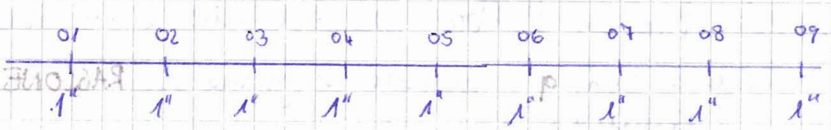
$a_{\overline{n}|i}$ è funzione crescente di n e decrescente di i.

questo può definirsi come il valore attuale posticipato di una rendita unitaria costituita da n rate al tasso i.

Per $i = 0$ la ① non è definita, in quanto, essendo $V = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1} = 1$ cesserebbe di valere la formula relativa alle progressioni geometriche.

Risulta $a_{\overline{n}|0} = n$ se l'anticipazione è gratuita il V.a. di una rendita coincide con la somma aritmetica delle singole rate.

Nell' ESEMPIO DI PRIMA:



$i = 0{,}065$

Al tempo 01 il V. A. posticipato sarà:

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{9}|0{,}065} = 1 \cdot (1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2} + 1(1+i)^{-3} + \dots + 1(1+i)^{-9} + \dots + (1+i)^{-n}$$

dove $v = (1+i)^{-n}$ è il FATTORE DI SCONTO COMPOSTO

Si determina in questo modo una serie geometrica di ragione v (perché se dividiamo un termine per il termine precedente otteniamo v):

$$\boxed{\begin{array}{ll} S = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{se } q < 1 \\[2ex] S = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q^n - 1} & \text{se } q > 1 \end{array}}$$

Noi usiamo la prima formula perché v è un valore <1, quindi si ha:

$$a_{\overline{n}|i} = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$$

Se consideriamo $u = (1+i)^t$ il fattore di capitalizzazione composto e, moltiplichiamo e dividiamo, si ha:

$$(v \cdot u) = 1$$

$$a_{\overline{n}|i} = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \cdot \frac{u}{u} = v \cdot \frac{(1-v^n)}{1-v} \cdot \frac{u}{u} = \frac{1-v^n}{u-1} = \frac{1-v^n}{i}$$

visto che $u \cdot v = (1+i)^t (1+i)^{-t} = (1+i)^{t-t} = (1+i)^0 = 1$

Allora:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$$

Si può anche scrivere (moltiplicando e dividendo per u^n)

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} \cdot \frac{u^n}{u^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$ o, equivalentemente $$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Così l'esempio diventa: $a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{9}|0{,}065} = \dfrac{1-v^n}{i} = \dfrac{1-1{,}065^{9}}{0{,}065} = 6{,}656104187$ →

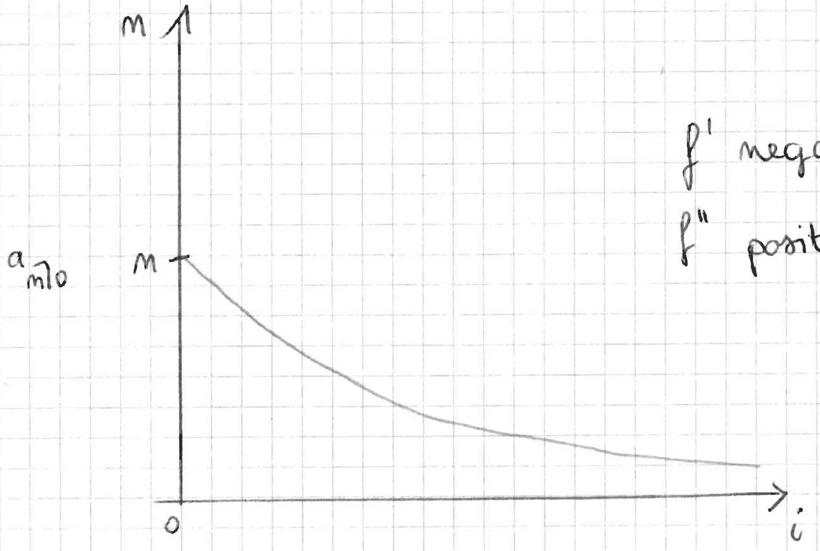
$A_p = R \cdot a_{\overline{n}|i} = 1.000.000 \times 6{,}656104187 = 6.656.104{,}2$ continua a pag 42

$$A_p = R \cdot a_{\overline{n}|i} \rightarrow \text{RENDITA EFFETTIVA}$$

NB: A parità di tasso, il prodotto tra il FATTORE DI SCONTO COMPOSTO v^n e il FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA u^n vale sempre 1 quando n è uguale.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$a_{\overline{n}|i}$ è funzione crescente di n e decrescente di i



f' negativo

f'' positiva (convessa)

$\lim_{i \to \infty} VA = 0$

se $i = 0$ $a_{\overline{n}|i}$, cioè $a_{\overline{n}|0} = n$