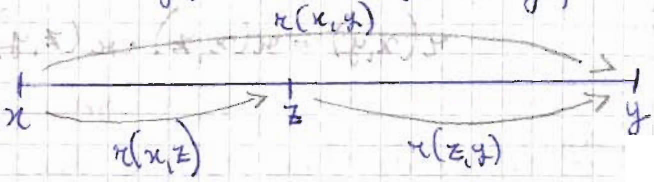
LEGGI FINANZIARIE SCINDIBILI

- Una legge finanziaria di capitalizzazione caratterizzata dal fattore di capitalizzazione $F(x,y)$ si dice **SCINDIBILE** $\forall\, x,y,z$ con $x \leq z \leq y$, quando risulta:

$$F(x,y) = F(x,z) \cdot F(z,y)$$



cioè, se il montante non varia in seguito all'interruzione dell'impiego e dalla sua immediata ripresa per un qualsiasi numero di volte *

- Se la legge di capitalizzazione è scindibile, lo sarà anche la legge di attualizzazione

leggesi "fi coniugato"

$\Phi(x,y)$ comparata, cioè:

$$\Phi(x,z) \cdot \Phi(z,y) = \frac{1}{F(x,z)} \cdot \frac{1}{F(z,y)} = \frac{1}{F(x,y)} = \Phi(x,y)$$

- Una legge finanziaria di capitalizzazione (o di attualizzazione) è SCINDIBILE se e solo se la sua FORZA D'INTERESSE (O DI SCONTO) corrispondente, dipende al più dall'epoca finale y e non dall'epoca iniziale x.

- Infine, l'intensità di variazione prodotta alla fine dell'operazione non dipende dalla data di inizio della stessa operazione.

- L'unica legge scindibile è la composta che è indipendente dal tempo per cui è possibile scindere i periodi

- Se la forza d'interesse varia rispetto al tempo la legge non è scindibile.

- Se la forza d'interesse non varia (cioè è costante) allora la legge finanziaria è scindibile

* In altri termini:
Il montante generato da un investimento non risulta alterato da una capitalizzazione intermedia degli interessi maturati

Dimostrazione formale

1 • SCINDIBILITÀ NEL REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

$$r(x,y) = r(x,z) \cdot r(z,y) \quad \forall \; x \leq z \leq y$$ (PRINCIPIO DI SCINDIBILITÀ)

⇓ CONDIZIONE DI SCINDIBILITÀ

Il montante tra x e y deve essere uguale a quello tra x e z e z e y.

Conosciamo il fattore di capitalizzazione semplice $r(t) = (1+it)$ che per $t = y-x$ diventa:

$r(x,y) = (1+i(y-x))$, a questo punto applico il principio di scindibilità:

$$r(x,z) \cdot r(z,y) = [1+i(z-x)] \cdot [1+i(y-z)] =$$

$$= 1 + i(y-z) + i(z-x) + i^2(z-x)(y-z) =$$

$$= 1 + iy - \cancel{iz} + \cancel{iz} - ix + i^2(z-x)(y-z) =$$

$$= 1 + iy - ix + i^2(z-x)(y-z) =$$

$$= \underbrace{1 + i(y-x)}_{\text{legge di capitalizzazione}} + i^2(z-x)(y-z) > 1 + (y-x)i$$

N.B.:

Il montante del primo membro è più grande del secondo, quindi il principio di scindibilità non è soddisfatto. Pertanto, la legge di capitalizzazione semplice NON È SCINDIBILE, e inoltre interrompere la capitalizzazione è un'operazione fruttuosa, perché più interrompo più il montante si ingrossa.

(usare i)

2 • SCINDIBILITA' NEL REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE (o sconto commerciale)

Conosciamo la legge di capitalizzazione commerciale

$r(t) = \frac{1}{1-dt}$ che per $t = y-x$ diventa:

$$r(x,y) = \frac{1}{1-(y-x)d},$$

a questa legge si arriva partendo dalla legge di capitalizzazione commerciale illustrata nel libro a pag 36 così scritta:

$r(t) = \frac{1+i}{1+i-it}$ o $r(t) = \frac{1+i}{1-(t-1)i}$ (usare d)

$$\boxed{\text{NOTA: } r_i = \frac{1+i}{1+i-it} = \frac{\frac{1+i}{1+i}}{\frac{1+i}{1+i} - \underbrace{\left(\frac{i}{1+i}\right)}_{d} t} = \frac{1}{1-dt}}$$

Partendo dalla relazione $i = \frac{d}{1-d}$, a cui si arriva da $d = \frac{i}{1+i}$, si ha:

$$r(t) = \frac{1+\frac{d}{1-d}}{1-(t-1)\cdot\frac{d}{1-d}} = \frac{\frac{1-\cancel{d}+\cancel{d}}{1-d}}{\frac{1-d-(t-1)\cdot d}{1-d}} = \frac{\frac{1}{1-d}}{\frac{1-\cancel{d}-dt+\cancel{d}}{1-d}} = \frac{\frac{1}{1-d}}{\frac{1-dt}{1-d}} = \frac{1}{\cancel{1-d}} \cdot \frac{\cancel{1-d}}{1-dt} =$$

$$= \frac{1}{1-dt} = r(t)$$

Adesso applichiamo il principio di scindibilità:

$$r(t) = \frac{1}{1-dt} \Rightarrow r(x,y) = \frac{1}{1-(y-x)d}$$

$$r(x,z)\cdot r(z,y) = \frac{1}{1-(z-x)d} \cdot \frac{1}{1-(y-z)d} =$$

$$= \frac{1}{1-(y-z)d-(z-x)d+(z-x)(y-z)d^2} = \frac{1}{1-yd+\cancel{zd}-\cancel{zd}+xd+(z-x)(y-z)d^2} =$$

$$= \frac{1}{1-yd+xd+(z-x)(y-z)d^2} = \frac{1}{1-(y-x)d+(z-x)(y-z)d^2} < \frac{1}{1-(y-x)d}$$

A parità di numeratori, il denominatore più grande produce una frazione più piccola, ecco perché il primo membro è minore del secondo membro, e così si vede pure che NON viene soddisfatto il principio di scindibilità.

Pertanto, la legge di capitalizzazione commerciale NON è SCINDIBILE, inoltre, interrompere la capitalizzazione risulta essere un'operazione infruttuosa, perché se spezzetto la capitalizzazione ottengo un montante più piccolo rispetto a quello che otterrei se non spezzettassi la capitalizzazione. (cosa che si evince dalla diseguaglianza dell'ultimo passaggio algebrico.

3 • SCINDIBILITÀ NEL REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTO.

Conosciamo la legge di capitalizzazione nel regime composto

$r(t) = (1+i)^t$ che per $t = y-x$ diventa (usare i)

$r(x,y) = (1+i)^{(y-x)}$

Applicando il principio di scindibilità si ha:

$$r(x,y) = r(x,z) \cdot r(z,y) \qquad \left[a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \right]$$

$$= (1+i)^{(z-x)} \cdot (1+i)^{(y-z)} = (1+i)^{(\cancel{z}-x+y-\cancel{z})} = (1+i)^{y-x} \Longrightarrow$$

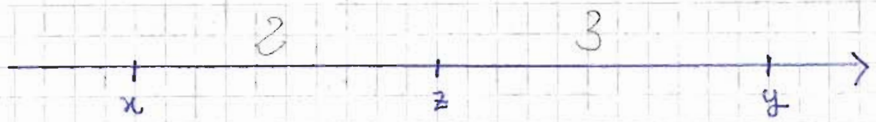
$$\Longrightarrow r(x,y) = r(x,z) \cdot r(z,y)$$

$$(1+i)^{y-x} = (1+i)^{y-x}$$

Qui è dimostrato che la legge di capitalizzazione È PERFETTAMENTE SCINDIBILE, cioè, il montante spezzettato è uguale al montante di tutto il periodo.

Ciò significa che spezzettare la capitalizzazione porta allo stesso risultato che si avrebbe non spezzettandola.

MONTANTE DI INVESTIMENTO E DI PROSEGUIMENTO



A) $C \longrightarrow C\, r(z,y)$ MONTANTE D'INVESTIMENTO

B) $C \cdot v(x,z) \longleftarrow C \longrightarrow C \cdot v(x,z) \cdot r(x,y)$ MONTANTE DI PROSEGUIMENTO

Esempio A) $£\ 1000 \cdot r(z,y)$, se $t = y - z \Rightarrow £\ 1000 \cdot r(t)$

se $r(t) = (1+i)^t$ e se $i = 0{,}05$ e $t = 3 \Rightarrow$

$C(3) = 1000\,(1{,}05)^3 = 1157{,}6\ £$

Esempio B) se $t = (z - x) = 2$ $\quad v(t) = (1+i)^{-t}$ ovvero $\dfrac{1}{(1+i)^t} \Rightarrow$

$$C(5) = 1000\,(1{,}05)^{-2}\,(1{,}05)^5 = 1157{,}6\ £$$

Il tutto è realizzabile solo se la legge di capitalizzazione e di sconto è scindibile, cosa vista per il regime composto e non per quello semplice e commerciale.

CONDIZIONE DI UGUAGLIANZA $\longrightarrow$ $C\, r(z,y) = C \cdot v(x,z) \cdot r(x,y) =$

$$= \frac{C}{r(x,z)} \cdot r(x,y)$$

MONTANTE D'INVESTIMENTO è il capitale prodotto al tempo y dall'impiego di un capitale che in $z\ (<y)$ ammontava a C; pertanto è un investimento effettuato in $x < z < y$, ed è pari, in y, a:

$$C \cdot r(z,y)$$

MONTANTE DI PROSEGUIMENTO è invece prodotto nello stesso istante finale y, da un capitale che in $z\ (<y)$ era pari a C e che risulta il montante, in z, di un precedente investimento effettuato in $x\ (<z)$, e che in z, prosegue indisturbato il suo svolgimento.

La somma che era investita in x (per produrre in z il montante C), è pertanto il valore attuale, in x, del capitale disponibile in z, cioè:

$$C \cdot v(x,z) = C \cdot \frac{1}{r(x,z)}$$

ed il montante di proseguimento risulta:

$$C \cdot v(x,z) \cdot r(x,y) = \frac{C}{r(x,z)} \cdot r(x,y)$$

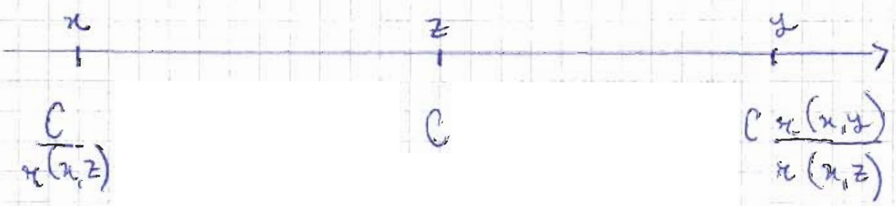
La condizione di uguaglianza pertanto risulta:

$$C \cdot r(z,y) = C \cdot v(x,z) \cdot r(x,y) = \frac{C}{r(x,z)} \cdot r(x,y) = C\,\frac{r(x,y)}{r(x,z)} \iff$$

$$\iff r(x,z) \cdot r(z,y)$$

Questa è la condizione di scindibilità per il montante di proseguimento

La condizione di uguaglianza delle due nozioni è soddisfatta (qualunque sia C) se, e soltanto se, la legge finanziaria è scindibile.



CONCLUSIONI SU FORZA D'INTERESSE, SCINDIBILITA' E MONTANTI

La forza d'interesse caratterizza le leggi finanziarie scindibili; una legge finanziaria $r(x,y)$, oppure $v(x,y)$ è scindibile se e solo se la forza d'interesse $\delta(x,y)$ o la forza di sconto $\sigma(x,y)$ corrispondente, dipende, al più, dalla sua epoca finale y, cioè, è costante rispetto all'epoca iniziale x.

Nelle leggi ad una variabile, la condizione di scindibilità è:

$$r(t+s) = r(t) \cdot r(s) \quad \forall\, t, s > 0$$

Se $r(t)$ è crescente e scindibile (vedi quella composta), allora:

$$r(t) = K^t \qquad \text{con } K = r(1) > 1$$

La scindibilità esiste solo nel regime di interesse composto; in tal caso, condizione necessaria e sufficiente è $\delta(t)$ COSTANTE.

Dall'analisi della forza d'interesse si possono evidenziare le seguenti proprietà caratteristiche di una legge finanziaria:

1) SCINDIBILITA'
2) INVARIANZA

rispetto alla durata $t = y - x$ della legge di capitalizzazione.