CONFRONTO TRA REGIMI DI CAPITALIZZAZIONE

r → FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE: Consideriamolo nei 3 regimi:

$r_s(t) = 1 + it$ Capitalizzazione semplice

$r_c(t) = (1+i)^t$ Capitalizzazione composta

$r_i(t) = \dfrac{1+i}{1+i-it}$ Capitalizzazione commerciale

Consideriamo le condizioni di validità dei 3 regimi:

1) per $t=0 \Rightarrow \overset{C_0}{M} = C_0$, cioè il montante coincide col capitale iniziale

In questo caso i tre regimi coincidono:

$$\boxed{r_s(0) = r_c(0) = r_i(0) = 1}$$

Verifichiamo sostituendo lo zero alla t:

$r_s(0) = 1 + i \cdot 0 = 1$

$r_c(0) = (1+i)^0 = 1$

$r_i(0) = \dfrac{1+i}{1+i-1\cdot 0} = 1$

2) per $t=1 \Rightarrow M = C_0(1+i)$

Anche in questo caso i tre regimi coincidono:

$$\boxed{r_s(1) = r_c(1) = r_i(1) = 1+i}$$

Verifichiamo sostituendo 1 alla t nei 3 regimi:

$r_s(1) = 1 + i \cdot 1 = 1+i$

$r_c(1) = (1+i)^1 = 1+i$

$r_i(1) = \dfrac{1+i}{1+i-i\cdot 1} = 1+i$

IN CONCLUSIONE:

per $t=0$ e $t=1$ i tre regimi coincidono

(3) Quale che sia il regime di capitalizzazione adottato C_t è una funzione crescente nel tempo, cioè la derivata prima $C'(t) > 0$ della funzione nel tempo è positiva.

Verifichiamo:

- Capitalizzazione semplice:

$C_t = C_0(1+it) = C_0 + C_0 \cdot i \cdot t$, la derivata è:

$C'(t) = 0 + C_0 \cdot i$ con $C_0 \cdot i > 0$

- Capitalizzazione composta:

$C_t = C_0(1+i)^t$, la derivata è:

$C'(t) = C_0(1+i)^t \cdot \log_e(1+i) > 0$

- Capitalizzazione commerciale

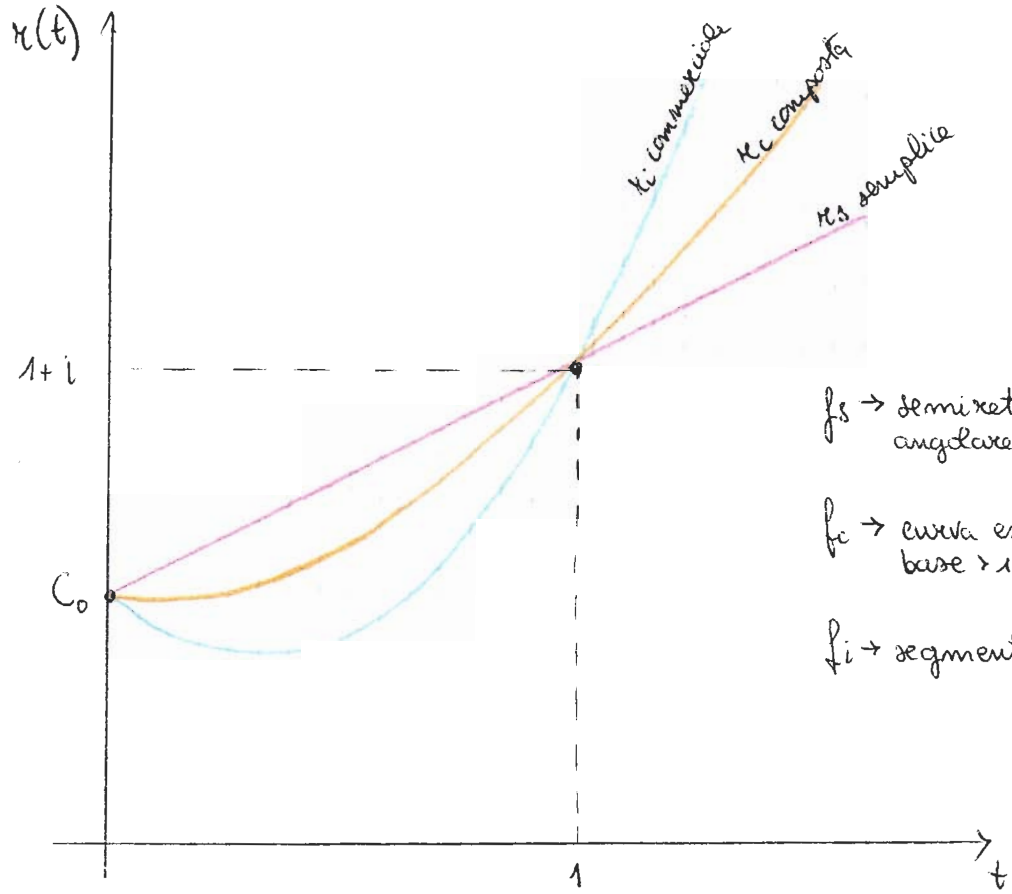
$C_t = C_0 \dfrac{1+i}{1+i-it}$, la derivata è:

$$C'(t) = C_0 \cdot \frac{0-(1+i)(-i)}{(1+i-it)^2} \Rightarrow C'(t) = C_0 \frac{i(1+i)}{(1+i-it)^2} > 0$$

- per $0 < t < 1 \Longrightarrow r_s(t) > r_c(t) > r_i(t)$
  semplice > composta > iperbolica

- per $t > 1 \Longrightarrow r_s(t) < r_c(t) < r_i(t)$
  semplice < composta < iperbolica

Questo significa che, a parità di tasso annuo $i > 0$, per un investimento di durata inferiore all'anno, il regime dell'interesse semplice è il più conveniente e quello dello sconto commerciale è il meno conveniente; per periodi superiori all'anno $(t > 1)$ il regime dello sconto commerciale è il più conveniente e quello dell'interesse semplice è il meno conveniente.



$f_s \to$ semiretta con coeff. angolare positivo

$f_c \to$ curva esponenziale di base > 1

$f_i \to$ segmento di iperbole

NB:

Nel regime di capitalizzazione commerciale deve valere la relazione $\boxed{t < \frac{1+i}{i}}$ relativamente al denominatore

Deriva da:

$$1+i-it>0$$
$$-it > -1-i$$
$$it < 1+i$$
$$t < \frac{1+i}{i}$$

Altrimenti:

- se $t = \frac{1+i}{i}$ il denominatore sarebbe uguale a zero.

  Verifichiamo sostituendo alla t del denominatore $\frac{1+i}{i}$:

  $$1+i-it \longrightarrow 1+i-\cancel{i}\left(\frac{1+i}{\cancel{i}}\right)=0$$

- se $t > \frac{1+i}{i}$ il denominatore sarebbe negativo e a ciò corrisponderebbe una funzione decrescente, che contrasta con una delle condizioni di validità dei regimi di capitalizzazione e cioè che la funzione deve essere crescente.

ERGO: deve essere $t < \frac{1+i}{i}$

CONFRONTO TRA IL REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E IL REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Si inizia la dimostrazione col confronto tra il regime composto e quello semplice, trattando la funzione che rappresenta la differenza tra i fattori di capitalizzazione (o montanti di capitale unitario) della semplice e della composta:

$$F(t) = \overset{r_c(t)}{f_c(t)} - \overset{r_s(t)}{f_s(t)} = (1+i)^t - (1+it)$$

Calcoliamo la derivata prima di questa funzione:

$$F'(t) = f'_c(t) - f'_s(t) = (1+i)^t \cdot \log(1+i) - i \qquad \left[y = a^x \quad y' = a^x \cdot \log a \right]$$

Quest'ultima è una funzione CONTINUA in t ed essendo $i>0$ la funzione tende a $+\infty$ per $t \to \infty$.

- per $t \to \infty$ $\quad (1+i)^{\infty} \cdot \log(1+i) - i = \infty \cdot \log(1+i) - 1 = +\infty$
- per $t \to 0$ $\quad (1+i)^0 \cdot \log(1+i) - i \implies \log(1+i) - i < 0$ $\quad$ VALE la disuguaglianza: $\log(1+x) < x \quad \forall x > 0$

dunque, per t che tende a zero la derivata $F'(t)$ è negativa per la definizione stessa di logaritmo.

La funzione $F'(0) = \log(1+i) - i < 0$ è sempre negativa. [è negativa in zero]
Si annulla, pertanto, una sola volta e t_0 è il suo unico zero.
Esiste un solo punto $t_0 > 0$ tale che $f'(t_0) = 0$.

Pertanto:

$$\lim_{t \to \infty} F'(t) = \infty \quad e \quad F'(0) < 0,$$

ne segue che la differenza $r_c(t) - r_s(t)$ è uguale a zero per $t = 0$; tale differenza decresce al crescere di t fino a t_0, e assume poi andamento crescente avendo punto di minimo in t_0.

$$r_c(t) - r_s(t) = 0 \quad \text{per } t = 0 \quad e \quad t = 1$$

La differenza $r_c(t) - r_s(t)$ risulta negativa per t compreso fra 0 e 1; si annulla per $t = 1$ e $t = 0$ ed è positiva per t maggiore di 1.

QUINDI :

- $x_c(t) - x_s(t) < 0$ cioè $x_c(t) < x_s(t)$ per $0<t<1$
- $x_c(t) - x_s(t) = 0$ cioè $x_c(t) = x_s(t)$ per $t=0$ e $t=1$
- $x_c(t) - x_s(t) > 0$ cioè $x_c(t) > x_s(t)$ per $t>1$

O ANCHE :

- $(1+i)^t < 1+it$ per $0<t<1$
- $(1+i)^t = 1+it$ per $t=0$ e $t=1$
- $(1+i)^t > 1+it$ per $t>1$

Si può anche osservare che:

- Poiché f' è crescente : (ha lo stesso andamento di $(1+i)^t$ che è crescente, poiché esponenziale con base >1)

$t < t_0 \Rightarrow f'(t) < f'(t_0) = 0$

$t > t_0 \Rightarrow f'(t) > f'(t_0) = 0$

cioè :

- f ha derivata negativa per $t<t_0$
- f ha derivata positiva per $t>t_0$

SEGUE CHE :

- f è decrescente per $t<t_0$
- f è crescente per $t>t_0$

ALTRA OSSERVAZIONE

- $f(0) = x_c(0) - x_s(0) = 0$
- $f(1) = x_c(1) - x_s(1) = 0$

$f(0) = f(1)$

SEGUE CHE:

[se una funzione è continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile e $f(a)=f(b)$, allora esiste un punto c appartenente ad $[a,b]$ tale che $f'(c)=0$]

la f

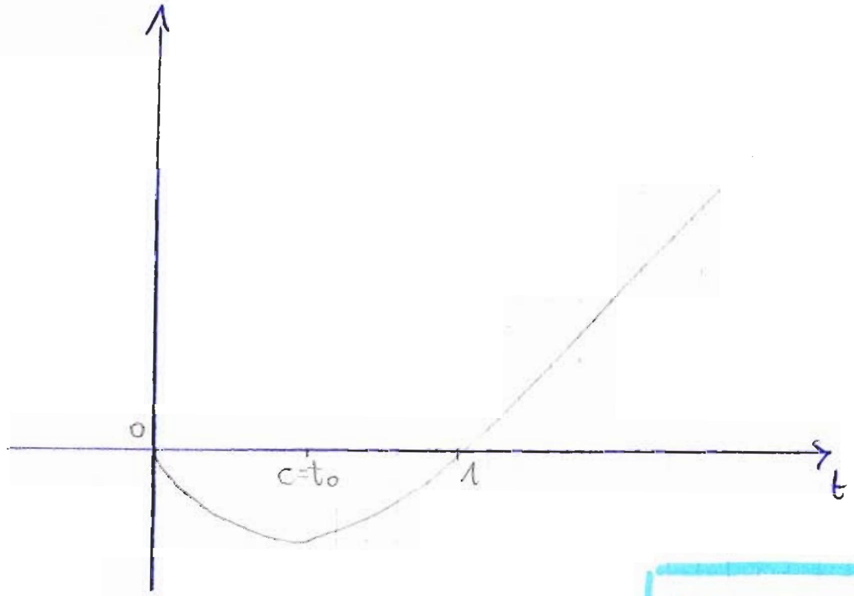
$0 \le t \le 1$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle, quindi:

ESISTE UN PUNTO c, CON $0<c<1$ TALE CHE $f'(c)=0$.

Si era provato che f' si annulla in un solo punto t_0 $\Rightarrow$

$c=t_0$ e quindi $0<t<1$

Allora la funzione $f(t)$ assume il seguente andamento:



e quindi

$f(t)<0$ per $0<t<1$

$f(t)>0$ per $t>1$

NB: $x_c(t) > x_s t$ anche per $t<0$

RICAPITOLANDO

$f'(t)$ è continua e crescente per $t>0$

$f'(0)<0$ (NEGATIVA IN ZERO)

$\lim_{t\to\infty} f'(t) = +\infty$

$\exists$ un solo punto $|$ $f'(t_0)=0$

Portanto:

$\lim_{t\to\infty} F'(t) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{t\to 0} F'(t) = 0$ $\qquad$ (infatti $x_c(t)-x_s(t)=0$ per $t=0$)

[Immaginiamo la funzione come una parabola, fino a t_0 la funzione decresce, poi cresce; ma non ha senso parlare di valori negativi quindi si considera solo la parte positiva]

CONFRONTO TRA REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE.

Resta da dimostrare che:

a) $r_c(t) > r_i(t)$ per $0 < t < 1$

b) $r_c(t) < r_i(t)$ per $t > 1$

DIMOSTRAZIONE a

Dalla $r_c t > r_i(t)$

deve aversi che $(1+i)^t > \dfrac{1+i}{1+i-it}$

$$\Downarrow$$

$1+i-it > \dfrac{1+i}{(1+i)^t}$ (Rapporto tra potenze aventi medesima base)

$$\Downarrow$$

$$1+i-it > (1+i)\cdot(1+i)^{-t}$$

$$1+i-it > (1+i)^{1-t}$$

$$1+i(1-t) > (1+i)^{1-t} \Longrightarrow (1+i)^{1-t} < 1+i(1-t)$$

Dunque avremo:

$$r_c(t) > r_i(t) \Longrightarrow (1+i)^{1-t} > 1+i(1-t)$$

Poiché nella commerciale deve necessariamente essere:

$t < \dfrac{1+i}{i}$ cioè $t < \dfrac{1}{d}$ infatti $d = \dfrac{i}{1+i}$ e $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1+i}{i}$

da cui $i = \dfrac{d}{1-d}$ e $d = \dfrac{i}{1+i}$

Diventa:

$$t < \frac{1+i}{i} < \frac{1+\frac{d}{1-d}}{\frac{d}{1-d}} \Rightarrow \left(1+\frac{d}{1-d}\right)\cdot\left(\frac{1-d}{d}\right) = \left(\frac{\cancel{1-d}+d}{\cancel{1-d}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{1-d}}{d}\right) = \frac{1}{d}$$

ERGO

$$t < \frac{1}{d}$$

Il denominatore, nella capitalizzazione commerciale $\left[r_i(t) = \frac{1+i}{1+i-it} \right]$ è positivo essendo $r_c(t) < r_s(t)$ per $0<t<1$, cioè

$$(1+i)^t < (1+it) \quad \text{per } 0<t<1$$

abbiamo che la formula

$$(1+i)^{1-t} < 1+i(1-t) \quad \text{è valida per } 0<1-t<1 \quad \text{oppure per } 1>t>0$$

Questo, in altre parole, può essere espresso dicendo che è valido che

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA > REGIME CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE

$$\text{per } 0<t<1 \implies r_c(t) > r_i(t) \quad \text{per } 0<t<1$$

DIMOSTRAZIONE b

La disuguaglianza contraria, cioè $r_c(t) < r_i(t)$, cioè

$(1+i) < 1+i(1-t)$ è verificata quando

$$r_c > r_s \quad \text{per } t>1$$

$$\Downarrow$$

$(1+i)^t > 1+it$, cioè quando l'esponente

$$1-t > 1 \implies -t > 1-1 \implies t<0.$$

È verificata anche quando

$$1-t<0 \implies -t<-1 \implies t>1$$

Pertanto, per $t>1$ è verificato che $r_c(t) < r_i(t)$

$$\Downarrow$$

$$(1+i)^t < \frac{1+i}{1+i-it}, \text{ da cui } (1+i)^{1-t} > 1+i(1-t)$$

CONFRONTO TRA SEMPLICE E COMMERCIALE

$$r_s(t) > r_i(t) \quad \text{per } 0<t<1$$

$$(1+it) > \frac{1+i}{1+i-it}$$

$$(1+it)(1+i-it) > 1+i$$

$$\cancel{1+i} - \cancel{it} + \cancel{it} + i^2t - i^2t^2 > \cancel{1+i}$$

$$i^2t - i^2t^2 > 0 \quad \text{divido per } -i^2$$

$$t(1-t) < 0 \,? \implies 0<t<1$$