

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA FINANZIARIA

Due o più capitali non sono né sommabili né confrontabili se non sono scadenti nello stesso istante di valutazione. Per poterli confrontare devono essere riportati allo stesso istante di valutazione.

Per questo il capitale va riferito sempre ad un periodo preciso di tempo.

Il capitale iniziale ($C, C_0, VA, A, C_{1/1/101}$) si contrappone un capitale che si riferisce ad un tempo t , successivo a quello iniziale ($C_t, M, VF, C_{31/12/101}$).

C_0 = Capitale nell'istante iniziale (VA) $C = VA$

C_t = Capitale al tempo t (montante) $\pi = k$

Dunque, due capitali, per poter essere confrontati, devono essere riportati alla medesima data.

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE

Il regime di capitalizzazione è una legge finanziaria che consente di aggiungere ad un capitale iniziale C_0 (VA) l'interesse prodotto in un certo periodo di tempo, per formare un capitale finale C_t (VF).

TRE PRINCIPALI REGIMI DI CAPITALIZZAZIONE nella prassi finanziaria

- 1) REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE
- 2) REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA
- 3) REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE (O IPERBOLICO)

Per la validità di un regime di capitalizzazione è necessario che questo goda di 3 caratteristiche fondamentali. (vedi pag. 4)

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

$$C_t = C_0 (1 + it)$$

$$C_t = M$$

$$\frac{1+i}{1+i} = 1$$

↓
deriva da

$$(4) M = C_0 + I$$

$$I = C_0 \cdot i \cdot t$$

↓

$$C_t = C_0 + C_0 \cdot i \cdot t \Rightarrow \text{da cui: } C_t = C_0 (1 + it)$$

È una funzione lineare e crescente, rappresentata da una retta, infatti la derivata prima è positiva $\Rightarrow C(t) = C_0 + C_0 i t$

$$C'(t) = C_0 i > 0$$

NB:

i = tasso d'interesse, cioè l'interesse prodotto dall'unità di capitale nell'unità di tempo

t = tempo, misurato a partire dall'istante iniziale $t=0$

I = interesse prodotto dal capitale C nel tempo t .

Relazione fondamentale: $M = C + I = C \cdot m(t)$

Nel linguaggio proprio della Matematica Finanziaria, la funzione $m(t)$ viene detto FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE e rappresenta il montante di un capitale unitario, impiegato per il tempo t , come risulta ponendo $C=1$ nella formula $M = C + I$

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

$$C_t = C_0 (1+i)^t$$

$$C(t) = C_0 (1+i)^t \Rightarrow C'(t) = C_0 (1+i)^t \cdot \log(1+i) > 0$$

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x \log a$$

$$D a^x = a^x \cdot \log a$$

C_0 (capitale iniziale) è positivo; $(1+i)^t$ è positiva se la base è > 0 , $1+i$ è > 0 .

$\log(1+i)$ è positivo perché l'argomento è > 1 .

La composta è crescente; per vedere se è concava o convessa si osserva il segno della derivata II.

$M'' > 0 \rightarrow$ concavità verso l'alto

REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE

$$C_t = C_0 \frac{1+i}{1+i-i \cdot t}$$

Questo regime di capitalizzazione ha per diagramma una curva passante per i punti $A(0; C_0)$ e $B(1; C_t)$.

È crescente in quanto la derivata prima è maggiore di zero.

$$\text{Dato che } D \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{[Df(x) \cdot g(x)] - [f(x) \cdot Dg(x)]}{(g(x))^2}$$

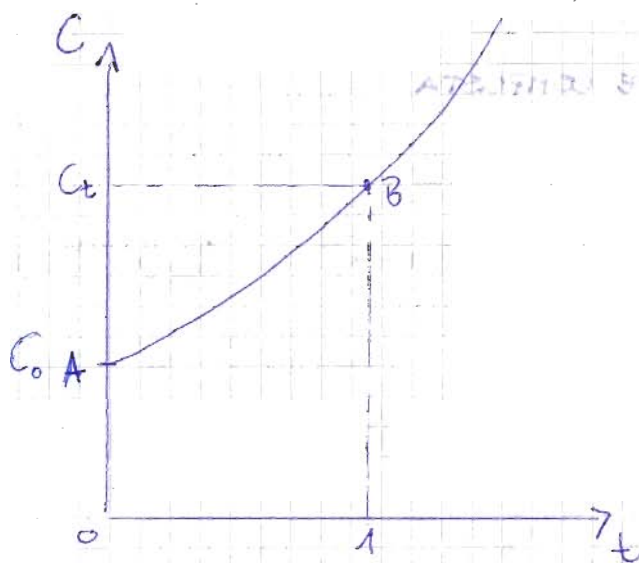
Si ottiene che:

$$C'_t = \frac{[0 \cdot (1+i-it)] - [C_0(1+i) \cdot (-i)]}{(1+i-it)^2} = \frac{[C_0(1+i) \cdot (-i)]}{(1+i-it)^2} = \frac{C_0 i + C_0 i^2}{(1+i-it)^2} =$$

$$= \frac{C_0 i (1+i)}{(1+i-it)^2} \quad \text{sicuramente maggiore di zero.}$$

La curva risulta, inoltre, concava verso l'alto perché la derivata C''_t è maggiore di zero.

$$C''_t = \frac{0 - C_0 i (1+i) \cdot 2(1+i-it)(-i)}{(1+i-it)^4} = \frac{C_0 i^2 (1+i) \cdot 2(1+i-it)}{(1+i-it)^4}$$



La **VALIDITA'** di ciascun regime presuppone l'esistenza delle seguenti tre caratteristiche:

a) se $t=0$ $C_t = C_0$ (un montante riportato al capitale iniziale rappresenta il capitale iniziale C_0)

b) se $t=1$ $C_t = C_0(1+i)$

c) Il montante C_t è una funzione crescente della variabile tempo (t), cioè $C(t) = f(t)$, per essere crescente occorre che la derivata I di $C(t)$ sia maggiore di zero $\Rightarrow C'(t) > 0$

- Caratteristica [a] applicata ai tre regimi:

• CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

se $t=0$ $C_t = C_0$

$C_t = C_0(1+it)$ se $t=0 \Rightarrow C_t = C_0$

• CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

se $t=0$ $C_t = C_0$

$C_t = C_0(1+i)^t$ se $t=0 \Rightarrow C_t = C_0$

• CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE

se $t=0$ $C_t = C_0$

$C_t = C_0 \frac{(1+i)}{1+i-it}$ se $t=0 \Rightarrow C_0 \frac{(1+i)}{(1+i)} = C_0$

- Caratteristica [b] applicata ai tre regimi:

• CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

se $t=1$ $C_t = C_0(1+i)$

$C_t = C_0(1+it)$ se $t=1 \Rightarrow C_t = C_0(1+i)$

• CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

se $t=1$ $C_t = C_0(1+i)$

$C_t = C_0(1+i)^t$ se $t=1 \Rightarrow C_t = C_0(1+i)$

• CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE

se $t=1$ $C_t = C_0(1+i)$

$C_t = C_0 \frac{(1+i)}{1+i-it}$ se $t=1 \Rightarrow C_t = \frac{C_0(1+i)}{1+i-1} = C_t = C_0(1+i)$

- Caratteristica [c] applicata ai 3 regimi

• CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Il montante è una funzione crescente di t ; è necessario che $C'(t) > 0$

$C(t) = C_0(1+it)$

$C'(t) = C_0(0+i) = C_0 \cdot i$

Poiché $C_0 i$ è una costante maggiore di zero $\Rightarrow C'(t) > 0$

• CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Il montante è una funzione crescente di t ; è necessario che $C'(t) > 0$

$C(t) = C_0(1+i)^t$

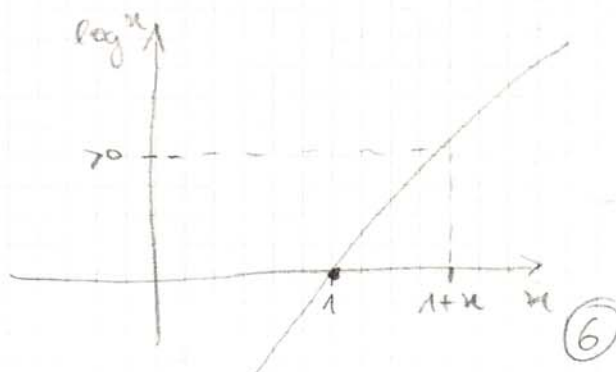
$[y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \log_e a]$

$C'(t) = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot \log(1+i)$

sempre
positivo

una potenza è
positiva se la
base è positiva:
 $(1+i)$ è sempre
positivo allora
anche $(1+i)^t$ è
sempre positivo

l'argomento del $\log(1+i)$ è maggiore di 1
allora $\log(1+i)$ è positivo.



• CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE

: ATOM

Il montante C_t è una funzione crescente di t ; è necessario che $C'(t) > 0$

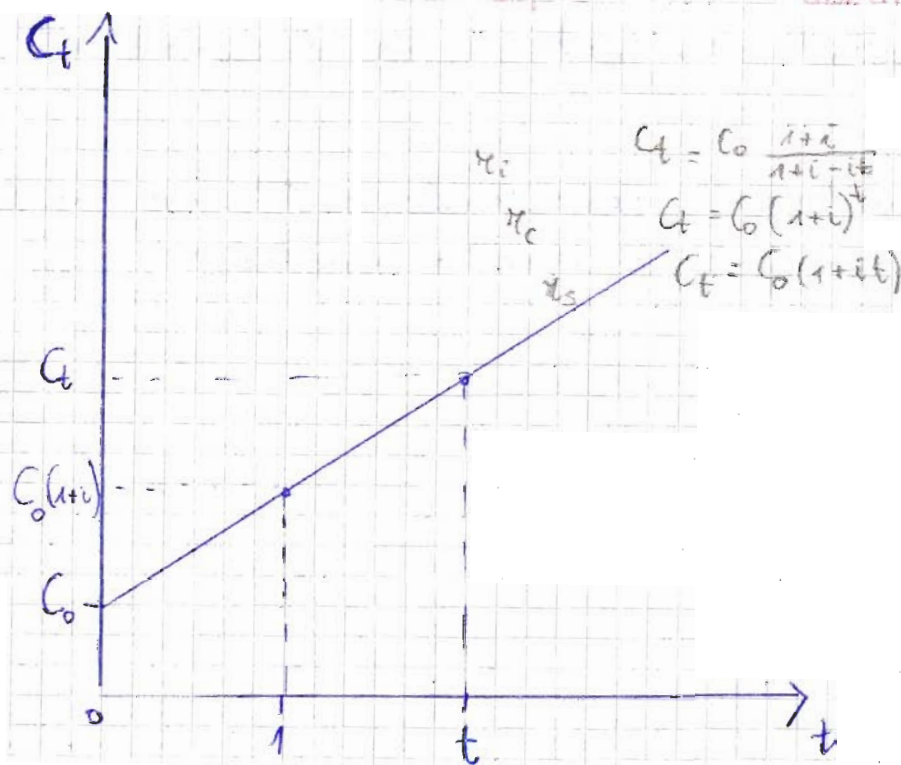
$$C_t = C_0 \frac{(1+i)}{1+i-it}$$

LAUTMATHS DEBAT

$$C'_t = C_0 \frac{0 - [(1+i)(-i)]}{(1+i-it)^2} = C_0 \frac{i(1+i)}{(1+i-it)^2} > 0 \Rightarrow C'(t) > 0$$

DEBAT

LAUTMATHS DEBAT



NOTA:

Due tassi d'interesse:

$$\frac{5}{100} = 0,05$$

1) TASSO PERCENTUALE

$$r = 5\%$$

Compensso spettante a chi investe 100 lire di capitale nell'unità di tempo.

2) TASSO UNITARIO

$$r = 0,05$$

Compensso spettante a chi investe una lira di capitale nell'unità di tempo

NB: l'unità di tempo in genere si riferisce all'anno, ma può anche riferirsi, se specificato, al semestre, bimestre, ecc.

INTERESSE

è il compensso che spetta a chi investe un capitale nel tempo.

SCONTO

è il compensso che spetta a chi anticipa un capitale a scadenza, nel tempo.

Sebbene le formule siano sostanzialmente uguali, le operazioni sono diverse, simmetriche (entrambi sono dati dalla differenza tra montante e valore attuale)

$$I = C_t - C_0$$

$$S = C_t - C_0$$

L'INTERESSE E LO SCONTO NEI TRE REGIMI PRINCIPALI

1) REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE:

- INTERESSE

$$\downarrow C_t = C_0(1+it)$$

$$M = C_0 + I \Rightarrow C_t = C_0 + I \Rightarrow C_t = C_0$$

$$I = M - C_0 \Rightarrow I = C_t - C_0 \Rightarrow I = C_0(1+it) - C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{C_0} + C_0 it - \cancel{C_0} \Rightarrow I = C_0 \cdot i \cdot t$$

$$I = Cit \Rightarrow \text{INTERESSE SEMPLICE}$$

$$\text{Essendo } i = \frac{r}{100}$$

$$\text{Esempio } r=5$$

$$i = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$I = \frac{C_0 \cdot r \cdot t}{100}$$

$$\text{se } t=1 \text{ si ha } I = \frac{C_0 \cdot r \cdot 1}{100}$$

l'unità di tempo si può esprimere in giorni in $\frac{360}{360}$ o in $\frac{365}{365}$

$$I = \frac{C_0 \cdot r \cdot \frac{360}{360}}{100} \Rightarrow I = \frac{C_0 \cdot r \cdot 360}{36000} \Rightarrow I = \frac{C \cdot 99}{D} = \frac{N}{D}$$

$$\text{Ponendo } D = \frac{36000}{r} \text{ come divisore fisso} \Rightarrow \frac{1}{D} = \frac{r}{36000} \Rightarrow I = \frac{C \cdot 99}{D}$$

$$\text{Ponendo } N = C \cdot 99 \text{ (numeri)} \Rightarrow I = \frac{N}{D}$$

- SCONTO

$$S_c = M - VA$$

$$S_c = C_t - C_0 \Rightarrow \text{se } C_t = C_0(1+it), \text{ allora } C_0 = \frac{C_t}{1+it}$$

$$\downarrow$$
$$S_c = C_t - \frac{C_t}{1+it} \Rightarrow C_t \left[1 - \frac{1}{1+it} \right] = C_t \left[\frac{1+it-1}{1+it} \right] = C_t \left[\frac{it}{1+it} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_c = \frac{C_t \cdot i \cdot t}{1+it} \Rightarrow \text{SCONTO RAZIONALE}$$

(non è molto usato)

2.) REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA:

- INTERESSE

$$I = C_t - C_0$$

$$C_t = C_0 (1+i)^t$$

$$u^t = (1+i)^t$$

fattore di capitalizzazione composto unitario, serve a portare in avanti nel tempo un capitale

$$C_t = C_0 (u)^t \Rightarrow I = C_0 (u)^t - C_0 \Rightarrow C_0 [(u)^t - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = C_0 [(u)^t - 1] \Rightarrow \text{INTERESSE COMPOSTO}$$

- SCONTO

$$S_c = C_t - C_0$$

dalla formula $C_t = C_0 (1+i)^t$ otteniamo $C_0 = \frac{C_t}{(1+i)^t} \Rightarrow C_0 = C_t (1+i)^{-t}$,

poniamo $(1+i)^{-t} = v^t$ che chiamiamo "FATTORE DI SCONTO" composto unitario, che serve a portare indietro il capitale nel tempo.

Donque:

$$C_0 = C_t \cdot (v)^t \Rightarrow S_c = C_t - C_0 \Rightarrow S_c = C_t - C_t (v)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_c = C_t [1 - (v)^t] \Rightarrow \text{SCONTO COMPOSTO}$$

Riepilogando nel regime composto:

$$\text{- INTERESSE: } C_t = C_0 (1+i)^t \Rightarrow \begin{cases} u = (1+i)^1 \Rightarrow C_t = C_0 (u)^t \Rightarrow I = C_0 [(u)^t - 1] \end{cases}$$

$$\text{- SCONTO: } C_0 = C_t (1+i)^{-t} \Rightarrow \begin{cases} v = (1+i)^{-1} \Rightarrow C_0 = C_t (v)^t \Rightarrow S_c = C_t [1 - (v)^t] \end{cases}$$

NB:

u^t e v^t servono a dare attuazione al principio di equivalenza finanziaria

3 •) REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMMERCIALE

- INTERESSE

$$I = C_t - C_0$$

$$C_t = C_0 \frac{1+i}{1+i-it}$$

$$I = C_0 \frac{1+i}{1+i-it} - C_0 = C_0 \left[\frac{1+i}{1+i-it} - 1 \right] = C_0 \left[\frac{1+i-1-it}{1+i-it} \right] = C_0 \left[\frac{it}{1+i-it} \right] \Rightarrow$$

$$I = C_0 \cdot \frac{it}{1+i-it} \Rightarrow \text{INTERESSE COMMERCIALE}$$

- SCONTO

$$S_c = C_t - C_0$$

Dalla formula $C_t = C_0 \frac{1+i}{1+i-it}$ ricavo $C_0 = C_t \cdot \frac{1+i-it}{1+i}$, quindi:

$$S_c = C_t - C_t \cdot \frac{1+i-it}{1+i} \Rightarrow S_c = C_t \left[1 - \frac{1+i-it}{1+i} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_c = C_t \left[\frac{1+i-1-i+it}{1+i} \right] \Rightarrow S_c = C_t \left[\frac{it}{1+i} \right]$$

ponendo $\frac{i}{1+i} = d$ si ha:
 TASSO DI SCONTO, compenso che spetta a chi anticipa 1 unità di capitale nell'unità di tempo
 $S_c = C_t \cdot d \cdot t \Rightarrow \text{SCONTO COMMERCIALE}$

$$d = \frac{i}{1+i} \Rightarrow i = d(1+i) \Rightarrow i = d + di$$

$$d = i - di \Rightarrow d = i(1-d), \text{ da cui:}$$

$i = \frac{d}{1-d}$

 $\Rightarrow \text{TASSO D'INTERESSE IN FUNZIONE DEL TASSO DI SCONTO}$

con $i > d$

NOTA:
 Quando si parla di interesse ci si riferisce al regime di capitalizzazione semplice; quando si parla di sconto ci si riferisce al regime di capitalizzazione commerciale.